現代物理最前線 5

大槻義彦 編

四次元を超える時空と素粒子
——隠された次元

坂東昌子・中野博章

量子テレポーテーション

古澤　明

超高圧による超伝導

天谷喜一・小野寺昭史

共立出版株式会社

JCLS ＜㈱日本著作出版権管理システム委託出版物＞

本書の無断複写は著作権法上での例外を除き禁じられています．複写される場合は，そのつど事前に㈱日本著作出版権管理システム（電話03-3817-5670, FAX 03-3815-8199）の許諾を得てください．

刊行にあたって

いよいよ20世紀科学文明から21世紀の科学文明に移る．20世紀の物理学を振り返れば，その進歩・発展は，想像を絶するものがある．原子・素粒子はもとより，クォークからブラックホール，宇宙のはてまで，物理学は解明してきた．そしていま，生命，脳新素材，複雑系の解明まで突き進んでいる．21世紀はどんな科学文明になるのか，考えれば，むしろ恐ろしくさえなってしまう．このような現状にあって，まず何よりも現代物理学の各分野を，十分知っておくことが要求される．わが国の物理学者，研究者，物理教育者は，他の先進国の人びとよりも，物理学の異なる分野にうといと言われる．自分の専門分野には，きわめて高い識見をもっているのに，ほんの少し専門をはずれてしまうと，知識もないし，興味ももたなくなるという傾向にあるとされる．

このような現状を少しでも改善しようとするものが，前シリーズ『物理学最前線』とか物理科学雑誌『パリティ』である．幸い，前シリーズ『物理学最前線』は好評を得て，31巻まで刊行することができた．

そこで今回，まったく新しいシリーズとして，『現代物理最前線』を世に送ることにした．前シリーズと比べて，今シリーズは現代物理の生々しい現状の最新情報を満載するものである．

2000年2月

大槻　義彦

目　次

四次元を超える時空と素粒子
——隠された次元＝坂東昌子・中野博章

量子テレポーテーション＝古澤　明

超高圧による超伝導＝天谷喜一・小野寺昭史

四次元を超える時空と素粒子——隠された次元

坂東昌子・中野博章

1章 はじめに

われわれの時空間は本当に四次元なのだろうか？ それを超えた‘異次元’はないのだろうか？ そんな世界を想像することだけでも結構わくわくする．極微の世界を対象にする素粒子論では現在，われわれの四次元の背後に「隠された余分の次元」——余剰次元（extra dimensions），これ以降は**余次元**と呼ぼう——が存在するのではないかという可能性がホットな議論になっている．

1.1 物理学と空間の次元

この世が三次元空間であるという認識は，いつからどのようにしてつくられてきたのだろう．小学校では，長さから出発して面積や体積を習う．面積は二次元領域の大きさを表す尺度，体積は三次元領域の大きさを表す尺度であった．空間が三次元だから，これでおしまいになる．こうしてわれわれは，いつのまにか空間が三次元ということを素直に受け入れてきた．定まった道を歩いているだけなら前後だけを見れば十分だが，広場を横切るには前後左右を見なければならないし，空を飛ぶときには上下も注意しなければならない．

この三次元空間での位置を表すのに，ベクトル $\boldsymbol{x} = \left(x^1, x^2, x^3\right)$ あるいは座標 x^i $(i = 1, 2, 3)$ を用いる．空間の性質(幾何学)は並進や回転で不変な量で表されるが，x^i のように添字付きの量は不変でない．不変なのは二点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x} + \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 間の距離 $\mathrm{d}r$ であり，$\mathrm{d}r^2 = \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^3\right)^2$ である．これはユークリッド空間の計量が $g_{ij} = \delta_{ij}$ であると表現される．こうしておくと，三次元の空間を一般化することはやさしい．n 次元空間での位置を n 成分ベクトル x^i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ で表し，二点間の距離を

$$\mathrm{d}r^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j$$

とすればよいのである.（以下，繰り返し添字について和記号 $\sum$ を省略する.）計量が $g_{ij} = \delta_{ij}$ のままなら n 次元ユークリッド空間であるし，そうでなければ"曲がった"空間を考えることになる.

数学者は，概念を抽象化し拡張することにより美しい理論を作り上げてきた．抽象的な思考を優先させると，現実との整合性はさておいて，どんどん先に進むことができる．その結果，複雑な図形や数式が高次元で考えると簡単な構造として理解できたり，美しい形に表現できるという例は多くあった．二次元平面内で複雑にクロスしている紐が，三次元空間の中では簡単にほどけるというように.

物理学では，空間を拡張することに数学ほど自由ではない．拡張をする以上，それが現実世界の自然現象の中でリアルな意味をもたないのであれば，「空虚なおしゃべり」に過ぎなくなる．しかし物理学者は，もし自分たちの推論を進めていった結果，**おのずと概念が拡がり法則が簡潔になっていく**のならば，現実世界とのしっかりしたつながりが実際に発見されることをしばしば経験してきた.「仮説や推論から未知の現象を予言し，それを検証する」という過程を通して，普遍的な運動方程式や物理法則を捉え，自然現象をより深く理解してきたのである．より簡潔で美しい法則は，より多様な自然現象を統一的に理解できる——これが物理学者が長い間かかって得た経験的な知恵である.

相対性理論が現れて以来，われわれは自然現象の舞台として，縦横高さの三次元空間に時間の一次元を併せた，**四次元の時空(space-time)** を認識している*．時間軸を0番目の方向として付け加えた四次元座標を x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ とし，時間方向と空間方向で逆符号をもつ計量 $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-, +, +, +)$，つまり

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad (1.1)$$

を採用すると，物理法則がどの観測者に対しても平等な形（明白に共変的な形）になるのである．その結果，例えば，複雑に絡みあった電気と磁気の現象が統一的に捉えられるようになった．さらにアインシュタインの一般相対論では，

---

* 自然界には因果律が厳然として存在するので，時間軸の概念は特別な意味をもつ．そこで，時間は一次元のまま，空間次元の拡張を検討しよう．なお素粒子論では，空間の次元 d でなく時空の次元 $D = d + 1$ を用いることが多いので，特に断らない限り，次元は時空の次元を指す.

計量を重力の場 $g_{\mu\nu}(x)$ とみなし，重力現象の本質を時空の曲率と同定することで，時空自身を物理的対象として動的に捉えることができるようになったのである．

近代物理学で「余分の空間次元」の可能性を最初に考察したのは，カルーツァ (Th. Kaluza) とクライン (O. Klein) である (1921–1926 年)．第四の空間方向を導入し，一般相対論を五次元の時空に拡張することにより，当時知られていた二種類の力——重力と電磁気力——が統一的に記述できる可能性を指摘したのである[1)]．このとき五次元時空は，われわれの経験と矛盾しないよう，半径が十分小さい円筒状に丸まっていると仮定された．第 3 章で詳しく述べる，**コンパクト化 (compactification)** された余次元の可能性である．

カルーツァ–クライン (KK) 型の高次元統一模型のアイデアが最初に提出されてから約 80 年が経過したが，この間に自然についてのわれわれの知識は驚くほど豊かになった*．次章で概観するように，現在では，素粒子(物質粒子)の間に働く力として四種類のものが知られるようになり，これらの力はすべてゲージ粒子という素粒子によって媒介されることが判明している．そして，ゲージ粒子のあり方は時空の局所的な性質と結び付いた**ゲージ原理**という考え方で整理されているのである．

そして今，物質と力の統一的理解を目指した研究の流れの中で，われわれの時空認識は大きな変革を迎えつつあるように思われる．第 5 章以降で述べるように，**「ブレイン世界」(brane world)**，つまり，われわれの四次元世界を高次元時空に埋め込まれた「ブレイン」(空間三次元的に拡がった壁，あるいは膜) とみなすシナリオが展開されはじめているのである．そこでは，単にコンパクト化された余次元空間を考えるだけでなく，その中でゲージ粒子や物質粒子の場 (第 6 章)，さらには重力場 (第 7 章) が，どのように**局在 (localize)** しているかが問題となる．また，四次元世界での法則や素粒子の多様性の起源を余次元での局在化のあり方に求める，という新しい視点も提供されている．つまり，素粒子の存在様式を，単によりミクロを追求するのではなく，高次元時空の構造とその中での局在化した対象として動的 (ダイナミカル) に捉えようというので

---

* 最初に高次元理論が試みられて以降の素粒子像の発展を承けて，高次元統一理論が如何なる展開を見せたかについては，文献 2) に詳しいのでぜひ参照してほしい．

ある．

ここでは，素粒子の標準模型の背後に「隠された次元」があるのではないか，という試みがどのような背景から生まれてきたのか，余分の空間次元などというものが，どのようにしてこれまでの経験と矛盾せずに存在し得るのか，また何を予言するのか，そして現在どういう方向に向かおうとしているのか，最新の研究の一端を紹介したい．さらに，それがわれわれの時空観や物質観にどのような変革をもたらし得るのか，その息吹を感じてとってもらえれば幸いである．

1.2　スケールの話――マクロからミクロへ？

「素粒子」という言葉が物質を構成する最小要素を意味するものとすると，その具体的な内容はわれわれの自然認識の発展とともに変遷してきた．電子や原子核が発見される一世紀ほど前までは原子が素粒子であったが，原子の内部構造は，原子核とその周りの電子に働く電磁気力(**電磁相互作用**)を量子力学で取り扱うことにより解明された．ミクロな世界を記述する理論形式として量子論が発見されたのである．そして光子と電子，さらに原子核の構成要素としての核子(陽子と中性子)が素粒子とみなされるようになる．

しかし半世紀前に新粒子(ハドロン)が続々と発見されると，これらの素粒子の内部構造が議論されるようになり，その構成子であるクォークが登場する．原子核を形成する核力は湯川中間子論を経て，今ではクォーク間に働く**強い相互作用**という形で理解されている．一方，主に**弱い相互作用**でしか反応しないニュートリノや電子などのレプトンは，そのまま素粒子の地位を保っている．こうして，(三世代の)クォーク・レプトンが素粒子とみなされる時代になった．現在，クォーク・レプトン間の基本相互作用――重力を除いた三種類の力――に対して標準模型(standard model)と呼ばれる理論が成功をおさめ，第 2 章で述べるような，「ゲージ原理に基づく場の量子論」が素粒子世界を記述する理論形式として確立したのである．

このような発展の歴史は，マクロからミクロの世界へと続く自然界の階層性を反映した流れであったともいえる．そして，素粒子の概念が変更されるたびに，その世界を支配する新しい物理法則や理論形式が発見され，われわれは自然観の変革を迫られたのであった．

さて，以上のような様々なスケールでの自然現象は，三次元空間を舞台として記述されてきた．次節以降で，その背後に隠された空間次元が存在する可能性を探っていきたいのだが，そのためには，極微の素粒子が光速に近い超スピードで運動しているような，エネルギーや長さのスケールが登場する．つまり，日常的な感覚から掛け離れた世界を取り扱うことになる．そこでまず，エネルギーや長さのスケールの目安についてまとめておこう．

自然現象のスケールを考えるとき，不変・普遍な定数であるプランク定数 $\hbar$ と光速 c が 1 となるように単位系を選ぶのが自然である．この自然単位系では，すべての物理量が長さの次元 L を基本単位として表現される．例えば，速さが無次元量になるので，エネルギー・運動量・質量はすべて同じ次元をもつ．また不確定性関係 $\Delta x \Delta p \sim \hbar$ をみれば，これらが長さの逆数の次元 L^{-1} をもつこともわかる．このように，エネルギースケールと距離スケールが関係づけられて，高エネルギーの現象ほど時空の短距離での構造を探るものであることがわかる．長さの単位としてメートル(m)，エネルギーの単位として電子ボルト(eV)を用いて，代表的なスケールを列挙しておこう(表 1.1 参照)．

- 原子のスケール：原子半径は $1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m}$ が目安であり，$1\,\text{keV} = 10^{3}\,\text{eV}$ に相当する．化学反応のエネルギーは，電磁相互作用の効果で微細構造定数 $e^2/4\pi \approx 1/137$ ほど小さく，数 eV 程度である．乾電池は 1.5 V であった．
- 原子核のスケール：原子核半径は約 $1\,\text{fm} = 10^{-15}\,\text{m}$，エネルギースケールで $100\,\text{MeV} = 10^{8}\,\text{eV}$ である．原子核反応は化学反応の十万倍ほど激しい．
- 素粒子のスケール：素粒子には大きさがないと考えられているが，その力には特徴的なスケールが存在する．標準模型を特徴づけるエネルギースケールとして，弱い力の結合定数(フェルミ定数) G_{F} を用いて

$$m_{\mathrm{EW}} \sim \frac{1}{\sqrt{G_{\mathrm{F}}}} \approx 100\ \text{GeV} = 10^{11}\ \text{eV} \tag{1.2}$$

を採ることができる(§ 2.3 参照)．これは原子半径の 1 億分の 1 の長さ $(10^{-18}\,\text{m})$ に相当する．現在の加速器実験では，最高エネルギーが $1\,\text{TeV} = 10^{3}\,\text{GeV}$ に到達しようとしているが，これは $10^{-19}\,\text{m}$ 程度までの時空構

表 1.1　代表的なスケール

	長さのスケール	エネルギーのスケール
原子	10^{-10} m	1 keV $=$ 10^3 eV
原子核	10^{-15} m	100 MeV $=$ 10^8 eV
素粒子	10^{-19} m	100 GeV $=$ 10^{11} eV
重力	10^{-34} m	10^{18} GeV $=$ 10^{27} eV

造を探っていることにほかならない．

以上では，自然界の階層を低エネルギーから順に高エネルギーへ概観してきた．このような階層構造がどこまで続くのか，とは誰もが抱く疑問である*．そこで，最も基本的と思われるスケールから出発して，それより低いエネルギーの現象を演繹しようとする行き方もある．その際，最もなじみ深い力である重力がひとつの基準を与える．

- 量子重力のスケール：ニュートンの万有引力定数 $G_{\rm N}$ (あるいは，アインシュタインの重力定数 $\kappa^2 = 8\pi G_{\rm N}$) を用いると，四次元世界を特徴づける「最も基礎的なスケール」として，(ここだけ $\hbar$，c を復活させて)

$$m_{\rm pl}c^2 \equiv c^2\sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G_{\rm N}}} = 2.4\times 10^{18}\ \text{GeV}\ \approx\ 10^{27}\ \text{eV}\ ,$$
$$\ell_{\rm pl} \equiv \frac{\hbar}{m_{\rm pl}c}\ \approx\ 10^{-34}\ \text{m} \tag{1.3}$$

  を構成することができる．$m_{\rm pl}$ はプランク質量(reduced Planck mass)，$\ell_{\rm pl}$ はプランク長さと呼ばれるもので，重力の量子効果を特徴づけるものとみなされている．

重力の量子化は，自然界に存在する**四種類の基本相互作用**——重力も含めて——を統一的に理解するためには避けて通れない，重要な問題である(§ 5.1 参照)．

---

* 素粒子論というと，ますます極微な世界に入り込み，一体どこまで行くつもりなのか，といった質問をよくうける．しかしながら，その目指すところは，従来の現象——「上部構造」と呼ぼう——をより基本的な実体や概念——「下部構造」と呼ぼう——に基づいて説明しようとすることで，新しい概念や普遍的な原理に到達し，結果として，思いもかけない連関を見い出すこと，新しい統一的な自然観を獲得することである．このとき下部構造とは，ひたすらマクロからミクロ，つまり空間的な小ささを意味するのではなく，次章以降でみるように，時空そのものを指すこともある．余次元の可能性というとき，むしろ空間の次元を大きくすることによる新しい展開が意識されているのである．

ここで注目されるのは，$m_{\rm EW}$ に比べて $m_{\rm pl}$ が巨大なこと，標準模型のスケールとプランクスケールの間には十数桁にも及ぶ「巨大な間隙」が横たわっていることである．言い換えると，日常感覚とは異なって，**素粒子レベルでの重力は他の三種類の力に比べて極端に弱い**のである．

なお，重力が関係したスケールにはもうひとつ重要なものがある．

- 最近の宇宙論の観測は，ゼロでない宇宙定数 $\lambda \equiv 8\pi^2 G_{\rm N}\Lambda$ の存在を示唆しており

$$\lambda \sim \left(10^{26}\ {\rm m}\right)^{-2}\ , \qquad \Lambda \sim \left(10^{-3}\ {\rm eV}\right)^{4} \tag{1.4}$$

という正の値が報告されている[3,4]．L^{-2} の次元をもつ λ は宇宙の大域的構造に関連する量であり，10^{26} m という長さは宇宙の地平線スケールに匹敵する．一方，エネルギー密度の次元をもつ Λ は，宇宙の全エネルギーの半分以上を占めるともいわれる「真空のエネルギー密度」と解釈されるものである．

何故この Λ が，重力の基本スケール (1.3) と大きく掛け離れているのかという問題は宇宙項問題(cosmological constant problem)と呼ばれている[5]．究極のミクロと究極のマクロのスケール間に $\Lambda \sim \left(m_{\rm EW}^2/m_{\rm pl}\right)^4$ という謎めいた関係が成り立っていることは，その解決に量子重力を含めた素粒子の統一理論が決定的な役割を果たすことを予感させると同時に，時空の構造に示唆的でもある．

1.3　本当に時空は四次元か？

われわれは少なくとも日常生活の中で，余分の空間次元を体験したためしはない．日常感覚からすると，そんなものはないというのは自明のことである．感覚に頼るのではなく，客観的・物理的な探索手段(probe)——次元のセンサーと呼ぼう——を用いて空間の次元を観測するにはどうすればよいだろうか？ ここではまず，前節の概観を踏まえた予備的考察をしておこう[6]．

まず原子や分子のスケールで空間の次元を探る手立てとして，物質の熱的性質を考えよう．熱・統計力学は物質の個別的な性質を離れた普遍的な法則であるので，これを次元のセンサーに用いるのである．

分子は空間の中で熱運動をしており，分子1個のもつ平均運動エネルギーがマ

クロな温度を決めている．一般に熱平衡状態では等分配の法則が成り立ち，分子のエネルギーは運動のあらゆる自由度へ平等に分配される．もし余次元が存在し，かつ**原子や分子が余次元方向へ動くことができる**とすると，その方向への運動自由度へもエネルギーが等しく分配されることになる．一自由度あたりの平均エネルギーが温度であるから，もし自由度の数が異なれば，それは比熱の値に反映されるはずである．しかし今のところ，余次元方向に運動エネルギーが配分されているという実験報告はないので，たとえ余次元の世界があったとしても，その拡がりは原子・分子が熱運動で動けるほどの大きさ($1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m}$)ではないということになる．

もっとミクロな世界ではどうだろう？ § 1.2 の初めに概観したように，原子の様々な性質は，電磁場中の電子の状態を量子力学的に取り扱うことにより，見事に再現されている．つまり，少なくとも電磁気力を使って探る限り，$0.1\,\text{Å} \sim 10^4\,\text{eV}$ 程度までは余次元を感じていないことは検証済みである．さらに，原子核の構造も湯川理論(とその拡張)でほぼ決着がついている．原子核は，核子(陽子と中性子)が核力(強い相互作用)によって結合して構成されるが，少なくとも少数核子系ではその性質がよく再現されている．これで原子の約 10 万分の 1 ($10^{-15}\,\text{m}$) まで接近したが，依然として余次元が顔を出している兆候はない．

ここで，以上の考察には次のような抜け穴があることを注意しておこう．

もし，原子や原子核などが**「動けないくらい余次元空間が小さくなっている」**，もしくは**「余次元方向に全く動けない」**とすると，そのような余次元は論理的には排除されていないのである．実はこれらが「時空のコンパクト化」や「ブレイン世界」のアイデアにつながっていくのであるが，そのような可能性を追求する前に，われわれは原子・原子核やそれよりミクロな素粒子の世界を支配する力の本質に立ち入る必要がある．

2章 ゲージ原理——力の法則と空間の次元

§ 1.3 では，原子・分子や原子核の性質を用いて余分の空間次元の可能性を探った．余次元の存在に対して最も客観的な情報を提供するのは，力の法則，つまり力の伝わり方である．例えば重力や静電気力については，万有引力の法則やクーロンの法則がよく知られている．一般に素粒子の荷電を g で表すと，距離 r だけ離れた二粒子間に働く力 $F(r)$ およびそのポテンシャル $V(r)$ は

$$F(r) = \frac{g^2}{4\pi r^2}\ , \qquad V(r) = \frac{g^2}{4\pi r} \tag{2.1}$$

である．以下ではまず，これらの力(素粒子の相互作用)がゲージ場によって媒介されることを説明しよう．量子論で「場は粒子の生成消滅を表す」ことになるので，ゲージ粒子が力を媒介するということもできる．そして，ゲージ粒子を次元のセンサーに用いて，余次元の可能性を探索していくことにしよう．ゲージ場が余次元方向に拡がる(ゲージ粒子が余次元方向に動ける)ことで，力の法則がどのように変更されるかを調べるのである．

2.1 力の起源とゲージ粒子

古典的な電気と磁気にまつわる多様な現象は，1864 年にマクスウェルが書き下した方程式に集約される．さらに，空間の三次元と時間の一次元を四次元の時空にまとめた相対論的な記述をすると，電場と磁場，あるいはそのポテンシャルを統一的に理解できるようになる．四次元時空の座標 $x^\mu = (t, \boldsymbol{x})$ を x と略記すると，四次元電磁ポテンシャル

$$A_\mu(x) \begin{cases} \text{時間成分}(\mu = 0) & : \ \text{スカラーポテンシャル } A_0(t, \boldsymbol{x}) \\ \text{空間成分}\ (\mu = 1, 2, 3) & : \ \text{ベクトルポテンシャル } \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}) \end{cases}$$

を用いて電場や磁場が表されるのであった．電場と磁場の統一的法則から電磁

波という新しい現象が予言され，場の概念が確立していったことはよく知られている．これらのことを最初に学んだとき，その理論形式の見事なまでの簡潔さに魅力を感じた人は多いだろう．§ 1.1 でも述べたように，高次元で考えると複雑な対象が統一的に捉えられる典型例である．

ところで，マクスウェルは彼の方程式に至る過程で，空間の各点に「歯車」を想定し*，歯車の動きが空間全体にどう伝わっていくかを考察したという．これは，時代的制約を受けながらも，いわゆる近接作用論を展開したものであるが，改めて現代的な視点から考え直してもなかなか興味深い．ひとつの歯車を回すと，それにつれて周りの歯車が回転し，遠く離れた歯車に順次に力が伝わっていく．実はここに，現代的な「ゲージ原理」に通ずるものを読み取ることができる．そして，時空の各点各点の「歪み」が伝播する波は現在，ゲージ場と呼ばれ，これこそが力の起源を与えるものである．

ゲージ原理とは，場の定義の仕方(**規範**)あるいは場を測る目盛(**gauge**)を時空の各点で自由に取り換えても物理法則は不変であるべし，という局所対称性原理である．これを質量 m，スピン 1/2 の相対論的粒子を記述するディラック場の方程式

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi(x) = 0 \tag{2.2}$$

を例にとって説明しよう．この方程式の詳しい知識は，ここでの目的のためには必要ない．重要なのは，四次元座標による微分 $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ を含んだ波動方程式だということである．また定数の行列 γ^μ については § 4.1 で述べる．

方程式 (2.2) は，**大域的**位相変換 $\psi(x) \longmapsto \psi'(x) = \mathrm{e}^{ig\theta}\psi(x)$ の下で共変的である．つまり，変換のパラメータ θ が x^μ に依らない定数である限り，場として $\psi(x)$ と $\psi'(x)$ のどちらを用いても方程式の形が変わらない．一方，ゲージ原理は，時空の各点ごとに場の定義を変更する局所変換に対しても，物質場 $\psi(x)$ の従う方程式が共変的であることを要求する．この要請を満たすためには，時空

* マクスウェルが考えたのは弾性エーテルの「渦動モデル」であり，ファラデーの磁力管のアイデアにならって，全空間を埋めつくす無数の「エーテル渦動管」を導入して，「渦回転」を空間各点での磁場，「弾性ひずみ」を電場とみなした．そして，それらが「ボールベアリング」(軸受け)を介して隣接する渦動管にどう伝わっていくかを力学的に考察している[2)]．

の各点で**ゲージ場** $A_\mu(x)$ を導入し，方程式 (2.2) を

$$\Big[i\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu) - m\Big]\psi(x) = 0 \tag{2.3}$$

と変更しなければならない．実際，微分 ∂_μ を共変微分 $\partial_\mu - igA_\mu$ に置き換えたおかげで，この方程式は**局所的ゲージ変換**

$$\psi(x) \longmapsto e^{ig\theta(x)}\psi(x) \ , \qquad A_\mu(x) \longmapsto A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x) \tag{2.4}$$

の下で共変的になっていることが確かめられる．この置き換えは，まさに古典力学や量子力学で荷電粒子の電磁相互作用(ローレンツ力)を記述する際に現れたものにほかならない．このことから，この例でのゲージ場 $A_\mu(x)$ を電磁場と同定することができる．電磁相互作用の場合，局所変換 (2.4) が $U(1)$ 群をなすので，方程式 (2.3) は $U(1)$ ゲージ対称性をもつという．

このようにゲージ原理は，局所対称性を原理として採用することにより，電磁場の**存在理由**のみならずその**相互作用の仕方**まで決定するものであり，電磁気学を超えて現代素粒子論を貫く重要な考え方である．非可換ゲージ理論の提唱者の一人であるヤン(C.N. Yang)はこの状況を “symmetry dictates interactions” と表現している．また，局所対称性を考えることの自然さは，マクスウェルの考えを思い起こすと了解できるだろう．時空全体を一気に変えるような大域的変換を引き起こすには，超能力をもつ(？)強力な支配者がいないと到底できない．それに対して，時空の各点ごとに場の定義(規範)を自由にとって良いことを保証する方が自然である．いわば地方分権的な考え方である．ただし，この勝手な行動が単なる無政府主義に陥らないためには，お互いの間で十分に情報を交換することが大切である．手紙や電話，今ならメールを用いて十分にコミュニケーションを取りあえば，遠距離でも恋愛は可能なのである．コミュニケーションを媒介するのがゲージ場であるので，重力場も一種のゲージ場とみなせることを指摘した内山(R. Uchiyama)に従って，ゲージ場を「情報伝達の場」と呼ぶ方がよいかもしれない[7)]．

ゲージ原理は，ゲージ場自身の運動法則も規定する．局所ゲージ不変な作用

$$S_{\text{gauge}} = -\int d^4x\,\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ , \qquad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.5}$$

に対する変分原理より，マクスウェル方程式が導かれる．**ゲージ変換 (2.4) で移りあう場の配位——ゲージ変換による軌道(orbit)——は同一の物理的状態として同一視(ゲージ化という)されるので**，その代表元をゲージ固定条件 $\partial^\mu A_\mu = 0$ で指定することにすれば，光速($c=1$)で伝播する波動を記述する方程式

$$0 = \partial^\nu \partial_\nu A_\mu(x) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) A_\mu(t, \boldsymbol{x}) \tag{2.6}$$

が得られる．このようなゲージ場は量子化により，**ゲージ粒子**(電磁場の場合は光子)の生成消滅を表す演算子となる．このときゲージ対称性のおかげでゲージ粒子の質量はゼロである．

さて，ゲージ粒子を交換することによって物質粒子間に働く力が式 (2.1) の形になることを確かめよう．ここではグリーン関数を用いて，静的なポテンシャルを求めることにする．後で用いるので，質量 m の粒子の伝播を表すグリーン関数 $G(\boldsymbol{x}\,;m)$ の表式を与えておこう．すなわち

$$\left(-\Delta + m^2\right) G(\boldsymbol{x}\,;m) = \delta(\boldsymbol{x}) \ ,$$
$$G(\boldsymbol{x}\,;m) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}}{m^2 + \boldsymbol{p}^2} = \frac{1}{4\pi\,|\boldsymbol{x}|}\,\mathrm{e}^{-m|\boldsymbol{x}|} \tag{2.7}$$

この形は湯川ポテンシャルと呼ばれている．

ところで，空間の原点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に置かれた素粒子(荷電 g_1)がつくる静的な場 $A_0(\boldsymbol{x})$ は，$m = 0$ の微分方程式

$$-\Delta A_0(\boldsymbol{x}) = g_1 \delta(\boldsymbol{x}) \tag{2.8}$$

を満たすので，$A_0(\boldsymbol{x}) = g_1 G(\boldsymbol{x}\,;m=0)$ と決定される．これが場所 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}$ に置かれた別の素粒子(荷電 g_2)に及ぼす力のポテンシャルは

$$V(r) = g_2 A_0(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}) = g_1 g_2\ G(\boldsymbol{r}\,;m)|_{m=0} = \frac{g_1 g_2}{4\pi r} \tag{2.9}$$

となる．場の量子論に基づいた力のポテンシャルの導出については，例えば教科書 8) を参照してほしい．それによると，静的ポテンシャルの符号は時間計量 (1.1) と関係して決まり，スピン 1 をもつ光子の交換による電磁気力は(同種電荷に対し)斥力になり，スピン 2 をもつ重力子の交換による重力は引力になることもわかる．

2.2　高次元における力の法則

われわれがまだ知らない余次元が存在するとしたとき，力の法則がどのように変更されるかを調べよう．電磁場や重力場のゲージ粒子(光子や重力子)を次元のセンサーとして用いるのである．

そもそも力の法則 (2.1) において，空間が三次元であることは $F(r) \propto 1/r^2$ の関係——力の**べき則**(power law，冪乗のルール)と呼ぼう——に反映している．これを直観的に理解するため，電磁気学でおなじのガウスの法則を思い出そう．荷電をもつ素粒子が原点に置かれているとすると，それを点源にしてゲージ場が放射される．このとき，ゲージ場の強さを表す力線の束(flux)が，点源を中心にして空間全体に均等に拡がっていくと考える．すると，点源から距離 r だけ離れた球面 $\boldsymbol{S}^2$ を通過する流量は，球の表面積 $4\pi r^2$ に反比例して薄まっていく．こういうわけで，三次元空間での重力や電磁気力は $1/r^2$ に比例するのであった．

それでは，ゲージ場(ゲージ粒子)が高次元空間を伝播する場合，力のべき則はどうなるだろうか？ まず五次元時空の場合を考えよう．四次元空間中に置かれた半径 r の球面 $\boldsymbol{S}^3$ は表面積が $2\pi^2 r^3$ なので，再びガウスの法則より

$$F^{(4+1)}(r) = \frac{g^2}{2\pi^2 r^3}\ , \qquad V^{(4+1)}(r) = \frac{g^2}{4\pi^2 r^2} \tag{2.10}$$

となるだろう．一般に d 次元の空間が余分にある場合は，$3+d\,(=p)$ 次元空間中の単位球面 $\boldsymbol{S}^{2+d}$ の表面積を S_{2+d} と書く(これは $2\pi^{\frac{p}{2}}/\Gamma(p/2)$ に等しい)と，力のべき則は

$$F^{(4+d)}(r) = \frac{g^2}{S_{2+d}\, r^{2+d}} \propto \frac{1}{r^{2+d}}\ , \qquad V^{(4+d)}(r) \propto \frac{1}{r^{1+d}} \tag{2.11}$$

と変更される*．10 次元時空($d=6$)における力のべき則は $1/r^8$ といった具合である．空間の次元が大きければ大きいほどゲージ場の力線束が薄まり，遠方では力が急速に弱くなる．**ゲージ粒子が余次元方向に動ける自由度が力のべき則に反映する**，という言い方もできる．

---

* $V^{(4+d)}(r)$ が正しくエネルギーの次元をもつためには，$4+d$ 次元時空での荷電(結合定数) g_{4+d} は次元 $L^{d/2}$ をもつ必要がある．

このような力のべき則は空間の次元を検証する有効な手段である．では三次元空間におけるべき則 (2.1) は，どの程度まで検証されているのだろうか？ まず巨視的なスケールに目を向けると，天体現象から，$1/r^2$ に比例する万有引力の法則がおおよそ銀河団スケール 10^{23} m まで検証されているといってよいだろう．(§ 1.2 で触れたような正の宇宙定数 λ が存在すると，銀河団スケールより長距離では，λ に比例する斥力項が万有引力に加わる．) 逆に微視的スケールでは，§ 1.2 で述べたように，素粒子の標準模型がエネルギーにして $m_{\rm EW} \sim 100$ GeV 程度まで詳細に実証されている．このことは，距離にして $1/m_{\rm EW} \sim 10^{-18}$ m 程度までゲージ場による力が逆二乗則に従っていることを示している．

後の議論のため，ここで重要なことを注意しておきたい．次元のセンサーとして用いたのは，巨視的スケールでは重力場だけであり，微視的スケールでは重力以外の場だということである．特に 1 mm 以下のスケールでは，物体に働く重力が余りにも弱いため，重力の法則を検証することは容易でない．実際，**重力の法則が 1 mm 以下のスケールではまだ検証されていない**ことは多くの研究者の盲点であった．§ 5.3 では，この点を鋭く突いた，最近の議論を紹介しよう．

2.3　多様な力の法則——弱い相互作用と強い相互作用

多少脇道にそれるが，ここで弱い相互作用と強い相互作用についても言及しておこう．これら 2 つの力は，原子核の大きさ程度のスケールでのみ働く短距離力であり，単純な力のべき則 (2.1) が成り立たない．実は，これらの力の性質を理解する道程は「隠された対称性」を発掘する苦闘の歴史であった．——それは「隠された次元」を探るわれわれにとっても示唆に富むものである．

弱い相互作用は，太陽の熱核融合反応などで重要な役割を果たすものであるが，まず原子核のベータ崩壊を引き起こす力として発見された．これは，余りにも短距離力であったため，最初は複数の素粒子が接したときにしか働かない「接触相互作用」として定式化された．しかし，このフェルミ (E. Fermi) の理論はエネルギーが高くなると破綻するものであった．破綻の起こるエネルギースケールは，フェルミの結合定数 (1.2) からおおよそ 100 GeV と読み取ることができ，そのスケール付近で，フェルミ理論は新しい理論に移行すると予想された．この予想は見事に的中し，現在では「弱い力は**質量をもつ弱ゲージ粒子**

(W 粒子や Z 粒子)によって媒介される」とする標準模型が確立している*．媒介粒子の質量 $m_{\rm EW} \sim 100\,{\rm GeV}$ が当時の到達可能なエネルギーよりはるかに大きかったので，近似的に接触力のように見えたのである．

このことは，$m_{\rm EW}$ を無限大とみなす極限で，湯川型であったグリーン関数 (2.7) がデルタ関数になることからもわかるだろう．つまり

$$g^2 G(\boldsymbol{x}\,; m_{\rm EW} \to \infty) \sim \frac{g^2}{m_{\rm EW}^2} \int \frac{{\rm d}^3 p}{(2\pi)^3}\, {\rm e}^{i\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{g^2}{m_{\rm EW}^2}\, \delta(\boldsymbol{x}) \quad (2.12)$$

こうして，弱い力の背後には弱ゲージ対称性が隠されていたのであるが，その解明の鍵となったのが，ゲージ粒子に質量を与える機構(**ヒッグス機構**)である．弱荷電をもつスカラー場(ヒッグス場)が相転移を起こして真空中に凝縮しているとすると，その中を伝播する弱ゲージ粒子は，凝縮したヒッグス場から抵抗を受けるので，質量のある粒子のように振る舞う．これを「弱ゲージ対称性が自発的に破れた相(ヒッグス相)にある」などという．実際に W 粒子や Z 粒子が発見されたのは，フェルミの提案から半世紀も後(1983 年)のことであった．

強い相互作用は，さらに豊富な歴史に彩られている．最大の謎であったのは「クォーク閉じ込め」，核子などを構成する 3 つのクォークが決して単独では取り出せないという性質である．このため，強い力の荷電を(光の三原色に例えて)色電荷と呼んでいる．このような強い相互作用は現在，量子色力学(QCD)と呼ばれるゲージ理論で記述されており，強い力を媒介する色ゲージ場の粒子は糊(glue)のような役割を果たすので，グルーオン(gluon)と呼ばれている．強い力の背後には色ゲージ対称性が隠されていたのである．その解明の鍵は，「色電気力線の絞り込み」とも呼ばれる興味深い性質であった．つまり，電磁場の場合は図 2.1 のように，電気力線が三次元空間全体に拡がるのに対し，色ゲージ場の電気力線は図 2.2 のように，点源のクォークから**一次元の紐状に伸びていく**のである．その結果，クォーク間に働く力は距離が遠くなっても弱まらず，式 (2.11) において，空間次元が $3 + d = 1$ に相当するべき則を満たすことになる．つまり

$$V_{\rm QCD}(r) \sim \sigma\, r \quad (2.13)$$

* W 粒子が電荷をもつため，必然的に弱い力は電磁気力と“統一”されることになった．両者をまとめて電弱(electroweak)相互作用という．

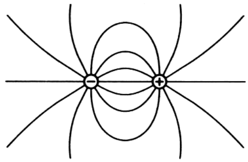


図 2.1　電磁場の電気力線は点電荷から等方的に拡がっていく．

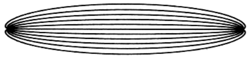


図 2.2　クォークと反クォーク間に働く色電気力線は紐状に絞り込まれる．

この性質は，電磁場のような $U(1)$ ゲージ理論では起きないが，それを拡張した非可換ゲージ理論では実現されることが 1970 年代を通じて確立された[9]．場の揺らぎが非常に大きくなる効果(非摂動効果)を正しく取り扱えるよう，QCD を「構成的に定式化」することにより，紐の張力 σ がゼロでないこと，「色ゲージ対称性が閉じ込め相にある」ことが確認されたのである．

このようにして四種類の基本相互作用はそれぞれ，ゲージ原理で説明できることになった．興味深いのは，それぞれのゲージ場は個性をもっており，表 2.1 のように，その現れ方(動力学的な性質)が多様なことである．そして，このことは高次元理論の将来にとっても示唆的である(§ 5.2 参照)．

表 2.1　四次元ゲージ理論の多様な相構造と力の法則

相互作用	真空の状態	力のポテンシャル
電磁力	クーロン相	クーロン型　(2.1)
弱い力	ヒッグス相	湯　川　型　(2.7)
強い力	閉じ込め相	線　形　型　(2.13)

3章 コンパクト化された余次元空間

§ 2.2 で述べたように，$3+d$ 次元の空間では，電磁気力や重力の法則が $1/r^{2+d}$ に変更される．余次元方向にもゲージ場が拡がってしまう効果が力のべき則に跳ね返ってくるわけである．力のべき則が $1/r^2$ であることは良い精度で実証されているのだから，余分の空間次元は，たとえ存在するとしても，われわれの三次元空間と対等なものではあり得ない．何らかの形で隠されていないといけないのである．ここでは，隠された次元の「最初の可能性」として，伝統的に採られてきた，コンパクト化の考え方を紹介する．

3.1 空間のコンパクト化と KK モード

最初に高次元理論の可能性を考察したカルーツアは，余次元の空間が，われわれの三次元空間と同じく無限に拡がっているのではなく，「コンパクト化」していると考えた．コンパクト化(compactification)とは，図 3.1 のように，宇宙がその方向には非常に小さく丸まっていて，全体として円筒のような形になっているという考え方である．最も簡単な $d=1$ の場合を考え，五次元時空の座標を $X^M = \left(x^\mu, x^5\right)$ と表そう ($M = 0, 1, 2, 3, 5$)．$x^5 \equiv y$ 方向の空間は，半径 R の円 $\boldsymbol{S}^1$ に丸まっているとする．言い換えれば，計量が

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{MN}\mathrm{d}X^M\mathrm{d}X^N = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}y^2 \tag{3.1}$$

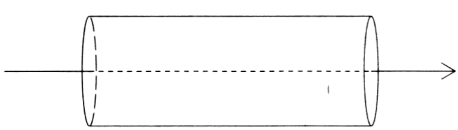


図 3.1 コンパクト化された空間．四次元時空の方向 x^μ を一次元の直線で表している．

で与えられる平坦な五次元時空において，座標 y と $y+2\pi R$ が同一点を表すと考えるのである．

余次元がコンパクト化されていたら，場の性質や力の法則はどうなるだろうか？ 手始めに，このような五次元時空を伝播する（ゼロ質量の）スカラー場 $\Phi(x,y)$ を考えよう．つまり，波動方程式

$$0=\partial^M\partial_M\Phi(x,y)=\left[\partial^\mu\partial_\mu+\partial_y^2\right]\Phi(x,y) \tag{3.2}$$

を考える．周期性 $\Phi(x,y+2\pi R)=\Phi(x,y)$ に着目して，場をフーリエ展開

$$\begin{aligned}\Phi(x,y)=&\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\,\phi^{(0)}(x)\\&+\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\phi^{(+n)}(x)\cos\frac{ny}{R}+\phi^{(-n)}(x)\sin\frac{ny}{R}\right]\end{aligned} \tag{3.3}$$

しよう．展開係数 $\phi^{(\pm n)}(x)$（ただし $n\geq 0$）は

$$0=\left[\partial^\mu\partial_\mu-m_n^2\right]\phi^{(\pm n)}(x)\ ,\qquad m_n\equiv\frac{n}{R} \tag{3.4}$$

を満たすので，これらを四次元時空におけるスカラー場とみなすことができる．余次元方向に定数の配位をもつ $\phi^{(0)}(x)$ を**ゼロモード**，余次元方向に振動するものを**カルーツァ・クライン(KK)モード**という．重要なことは，五次元方向への振動エネルギーが四次元では質量（の自乗）として観測されることであり，KK モードは余次元の半径に反比例した質量 $m_n=n/R$ をもつ（質量は L^{-1} の次元をもつことを思い起こそう）．x^5 方向の周期性のために運動量が量子化されることに対応し，そのような KK モードが無限個存在するので，これを KK タワーともいう．（余次元が複数次元の場合も，コンパクト化の半径に応じた KK モードが現れることはすぐわかるだろう．）

ここで技術的になるが，大切な点を補足しておこう．KK モード展開 (3.3) において，余次元方向の場の配位は，直交関数系

$$\varphi_0(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\,,\quad \varphi_n(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\begin{cases}\cos\left(|n|\,y/R\right) & \text{for}\quad n>0\\ \sin\left(|n|\,y/R\right) & \text{for}\quad n<0\end{cases} \tag{3.5}$$

を用いて表現されている．量子論では，四次元場 $\phi^{(n)}(x)$ によって生成消滅される粒子 1 個の波動関数が $\varphi_n(y)$ となる．おおざっぱにいってこれは，（y を粒

子の座標とする)量子力学の波動関数と考えてよい．そして，以降の考察においても波動関数の規格化条件

$$\int_0^{2\pi R} \mathrm{d}y\, \varphi_n(y)\, \varphi_m(y) = \delta_{nm} \quad (\, n,\, m \,=\, 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \cdots\,) \quad (3.6)$$

が大切なことは量子力学のときと同様である．

このようにして，コンパクト化された高次元時空における場は，四次元世界の住人(観測者)から眺めれば，いろいろな質量 n/R をもった場の集まりである．余次元の半径 R が小さいほど KK モードは重くなり，低いエネルギーでは励起されなくなる．特に**$1/R$ より低いエネルギーでは，余次元の存在は直接的な観測にかからなくなる．**§ 1.3 や § 2.2 で述べたような意味で余次元の兆候が観測されていないことは，余次元の半径が十分小さくないといけないことを意味している．逆に，加速器で $1/R$ 以上のエネルギーに到達できるようになれば，これらの励起状態が見つかるはずである．

$1/R$ 以下のエネルギースケールでは，コンパクトな余次元の存在は，われわれの四次元世界に何の痕跡(remnant)も残さないのだろうか？ もし余次元を考えたことが KK モードの存在としてしか現れてこないのであれば，つまり「思いもかけない概念の拡がりや単純化」をなんらもたらさないのであれば，それを考えることに積極的な意味はないだろう．しかし，そうではない．それがもたらす豊富な構造の例として，2 つのことを取り上げよう．ひとつはスピンをもつ高次元場から現れる多様なゼロモード(§ 3.2)であり，もうひとつは四次元有効理論における結合定数の大きさ(§ 3.3)についてである．

3.2　余次元からの多様な場——高次元統一理論の可能性

前節ではスピン自由度をもたないスカラー場を考えたが，もっといろいろな場合に余次元がもたらす豊富な場について紹介しよう．歴史的順序とは前後するが，まずスピン 1 をもつゲージ場を考えよう．前節では運動方程式を議論したが，作用原理で考えた方が見通しがよい．五次元における $U(1)$ ゲージ場 $A_M(x,y)$ の作用は表式 (2.5) を拡張して

$$S^{(5\mathrm{d})}_{\mathrm{gauge}} = \int \mathrm{d}^4x \int_0^{2\pi R} \mathrm{d}y\, \mathcal{L}^{(5\mathrm{d})}_{\mathrm{gauge}}\ ,$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}}^{(5\text{d})} = -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2} (F_{\mu 5})^2 \tag{3.7}$$

である．これに，スカラー場の場合 (3.3) と同様な KK モード展開

$$A_M(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} A_M^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_M^{(+n)}(x) \cos\frac{ny}{R} + A_M^{(-n)}(x) \sin\frac{ny}{R} \right] \tag{3.8}$$

を代入し，条件 (3.6) を用いて y 積分を実行すると，四次元有効理論の作用

$$S_{\text{gauge}}^{(4\text{d eff})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathcal{L}^{(n)} = \int \mathrm{d}^4 x\, \mathcal{L}^{(0)} + \sum_{\pm n=1}^{\infty} \int \mathrm{d}^4 x\, \mathcal{L}^{(\pm n)} \tag{3.9}$$

が得られる．計算の結果

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu}^{(0)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_5^{(0)} \right)^2 \tag{3.10}$$

$$\mathcal{L}^{(\pm n)} = -\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu}^{(\pm n)} \right)^2 - \frac{m_n^2}{2} \left(A_\mu^{(\pm n)} - \frac{1}{m_n} \partial_\mu A_5^{(\mp n)} \right)^2 \tag{3.11}$$

である．$\mathcal{L}^{(0)}$ の第一項は四次元での電磁場 $A_\mu^{(0)}$ を記述する作用 (2.5) であり，$\mathcal{L}^{(\pm n)}$ は質量 m_n の KK ゲージ場 $A_\mu^{(\pm n)}$ を表す*．重要なことは，$\mathcal{L}^{(0)}$ の第二項に，ゼロ質量の四次元スカラー場 $A_5^{(0)}(x)$ が現れていることである．つまり，高次元でのゲージ場を低い次元から眺めれば，同じスピンをもつ KK モードのほかに，低いスピンをもった場が自動的に現れるのである．これは，複号粒子模型では高いスピンをもった励起状態が現れるのと著しく異なる点である．なお，このスカラー場の興味深い性質については，文献 10) を参照してほしい．

さらにスピン 2 をもつ重力場の場合，高次元の一般座標不変性の結果として，**四次元のゲージ場が自動的に現れる**ことを確かめることができる．カルーツァ

* ゲージ場の質量はヒッグス現象(§ 2.3)として理解できる．(技術的になるが，補足しておこう．) 五次元での $U(1)$ ゲージ対称性は，その変換パラメータの KK モード展開

$$\theta(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \theta^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\theta^{(+n)}(x) \cos\frac{ny}{R} + \theta^{(-n)}(x) \sin\frac{ny}{R} \right]$$

により，無限個の $U(1)$ ゲージ対称性と同等である．このとき，$\delta A_5(x,y) = \partial_5 \theta(x,y)$ より導かれる変換則 $\delta A_5^{(\mp n)}(x) = (n/R)\,\theta^{(\pm n)}(x)$ は，$n \neq 0$ のゲージ対称性が自発的に破れ，$A_5^{(\mp n)}(x)$ が対応する南部-ゴールドストーン(NG)モードであることを示している．KK ゲージ場はこの NG モードを吸収して質量をもつのである．

が重力場と電磁場の統一を目指して五次元時空を最初に考察したのも，この事実に着目してのことであった．

いま，半径 R の $\boldsymbol{S}^1$ にコンパクト化された五次元の座標を無次元化して $x^5 = \phi$ $(0 \leq \phi < 2\pi)$ としよう．簡単のため KK モードを無視すると，x^5 方向に一様な五次元計量 $G_{MN}(x^\mu)$ は

$$ds^2 = G_{MN}dx^M dx^N = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + R^2 e^{2\sigma}\Big(d\phi + A_\mu dx^\mu\Big)^2 \quad (3.12)$$

のように，四次元での計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$，ベクトル場 $A_\mu(x)$ およびスカラー場 $\sigma(x)$ を用いて表される．つまり $G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + G_{55}A_\mu A_\nu$，$G_{\mu 5} = G_{55}A_\mu$ および $G_{55} = R^2 e^{2\sigma}$ である．このとき，五次元の一般座標変換として特に $x^\mu = x^{\mu\prime}$，$x^5 = x^{5\prime} + \theta(x^\mu)$ を考えると，$G_{\mu 5}$ の変換則

$$G'_{\mu 5} = \frac{x^\nu}{x^{\mu\prime}}\,G_{\nu 5} + \frac{x^5}{x^{\mu\prime}}\,G_{55} = G_{\mu 5} + G_{55}\,\partial_\mu \theta(x) \quad (3.13)$$

から，確かに四次元の $U(1)$ ゲージ場 $A_\mu(x)$ に対する局所ゲージ変換 (2.4) が導かれる．x^5 方向の並進（$\boldsymbol{S}^1$ の回転）を四次元時空の各点 x^μ ごとで独立に行ったものが，四次元のゲージ対称性になっているのである．あたかもマクスウェルの「歯車」（§ 2.1）が五次元方向に居場所を見い出したかのような趣きがある．

このようにコンパクト化された高次元理論は豊富な場を含んだものである．いわゆる KK 型の高次元統一理論は，余次元（内部）空間の幾何学的構造に基づいて四次元のゲージ対称性の起源を説明しようとするものであるし，あるいは，**最初から高次元ゲージ場を考える**ことにすれば，より多様な場を得ることができる．（ここでは一切省略するが，超対称性まで要求すると半整数スピンの物質場も自動的に現れる．）すべての場を統一的に記述できる可能性がここにある．

3.3　KK モードと有効理論——結合定数の大きさ

§ 3.1 で述べたように，コンパクト化された余次元の理論は，ゼロモードのほかに，巨大な質量をもつ一連の場（KK モード）を含んだ四次元の理論と等価である．KK モードの質量より低いエネルギースケールで妥当なこの理論は，四次元**有効理論**（effective theory）と呼ばれる．ここでは有効理論が，KK モードを考慮すると，高次元での力の法則 (2.10) を再現することを確かめてみよう．

荷電をもった物質粒子が五次元の $U(1)$ ゲージ場と強さ g_5 で結合する理論を考えよう．四次元有効理論におけるゲージ場とその KK モードは，五次元ではひとつの場にまとまっていたわけだから，物質粒子と同じ強さで結合するだろう．その結合の強さを g_4 と書いて，静的ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ を四次元理論で計算する．グリーン関数 (2.7) を用いて，各モードからの寄与を足しあげると

$$V_{\text{eff}}(r) = g_4^2 G(r\,; m=0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} g_4^2 G(r\,; m_n)$$
$$= \frac{g_4^2}{4\pi r}\left[1 + \frac{2\,\mathrm{e}^{-r/R}}{1-\mathrm{e}^{-r/R}}\right] \tag{3.14}$$

となる．第一項がゼロモードによる項であり，第二項が各 KK モードの効果を足しあげた項である．余次元の半径 R に比べて十分に遠方の距離 r で場を観測する場合，第二項の指数関数が無視できるので

$$V_{\text{eff}}(r) \sim \frac{g_4^2}{4\pi r} \qquad \text{for} \quad r \gg R \tag{3.15}$$

となって，確かに四次元的な $1/r$ 則 (2.9) が再現されている．逆に，r が R よりも短距離になる極限では

$$V_{\text{eff}}(r) \sim \frac{g_4^2}{4\pi r}\left[1 + \frac{2R}{r}\right] = \frac{g_4^2}{4\pi^2 r^2}(2\pi R)\left[\frac{r}{2R} + 1\right]$$
$$\sim 2\pi R \times \frac{g_4^2}{4\pi^2 r^2} \qquad \text{for} \quad r \ll R \tag{3.16}$$

となり，五次元的な $1/r^2$ 則 (2.10) に漸近する．コンパクト化のスケールを境にして，力の法則が変更されるのである．

以上より，五次元での結合定数 g_5 と四次元での有効結合定数 g_4 の関係を

$$g_4^2 = \frac{g_5^2}{2\pi R} \quad \left(= \frac{\widehat{g}_5^2}{2\pi R\Lambda}\right) \tag{3.17}$$

と読み取ることができる*．この式の分母に，コンパクト化された空間の「体積」が現れていることに注意しよう．その結果，**余次元の体積が大きければ大きいほど，四次元での有効結合定数が小さくなる．** この事実は，ゲージ場のゼロモー

* 15 ページの脚注で触れたように，g_5 は次元 $L^{1/2}$ をもつ．五次元理論を定義する“切断エネルギー”のスケール Λ を用いてこれを無次元化したものが $\widehat{g}_5$ である．

ドが余次元に拡がる効果として直接的に理解することもできる．余次元における場の配位は，規格化条件 (3.6) を満たす波動関数 (3.5) で表されることを思い起こそう．特にゼロモードの波動関数は余次元方向に一様に拡がっているので，ゼロモードのゲージ粒子を余次元内の特定の場所で見い出す確率は $1/(2\pi R)$ に比例することになる．あるいは，KK モード展開 (3.8) のゼロモード部分に着目して，物質粒子が感じる場を

$$g_5 A_0(x,y) = \frac{g_5}{\sqrt{2\pi R}} A_0^{(0)}(x) + (\,\text{nonzero modes}\,) \tag{3.18}$$

と書くと理解しやすいだろう．

こうして，ゲージ粒子が余次元方向に拡がる効果は，コンパクト化する前では力のべき則を変更してしまったのに対して，コンパクト化した後では，べき則そのものは変更しないで，結合定数の大きさの変更として現れることになる．この重要な事実は，しばしば**「体積による薄まり」**(volume suppression) と呼ばれている*.

* このことは最近，様々な文脈で興味をもたれており，例えば文献 11–13) がある．

4章 素粒子の左右非対称性と余次元

四次元世界の素粒子には，左右の非対称性(カイラル非対称性)が存在することが知られており，その起源を探ることは素粒子物理学の重要な課題である．これは四次元の物理ではもちろんのこと，余次元の物理を考える上でも，重要な視点を提供する．隠された次元の新しい考え方を紹介する前に，まずこの章では，**コンパクト化された余次元の理論から，カイラル構造を如何にして導き出すか**について考えよう．まず素粒子の左右非対称性(カイラル構造)とは何のことかを解説し，その後で，オビフォルド空間へのコンパクト化の方法を紹介する．

これ以降の話には発展途上の話も含まれるので，ある程度の予備知識を前提にせざるを得ない．しかし考察を余次元が一次元の場合に限るので，§ 3.1 で述べたような，量子力学の波動関数との類推が理解の助けになるだろう．波動関数のグラフなどを見て，イメージをつかんでほしい．

4.1　四次元のカイラル構造

素粒子の標準模型では，「左巻き」あるいは「左手型」のクォークやレプトンのみが弱い力を感じるという事実が重要である．1954 年にパリティ非保存(左右対称性の破れ)が発見されたのを契機にして，左手型の粒子のみが弱い相互作用の荷電をもっていることが明らかになった．このような**カイラル非対称性 (chiral asymmetry)**は，標準模型の相互作用がもつ大きな特徴である．

ところで，クォークやレプトン(単にフェルミ粒子と呼ぼう)が「左巻き」とか「右巻き」とはどういう意味だろう．これは直観的には，運動量 $\boldsymbol{p}$ 方向のスピン $\boldsymbol{s}$ の大きさ——**ヘリシティ(helicity)**——を用いて説明される．スピンの大きさが 1/2 のフェルミ粒子の場合，パウリ行列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を用いてスピ

ンを $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\sigma}/2$ と表すと，$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})/2|\boldsymbol{p}|$ がヘリシティである．これは $\pm1/2$ という値をとるので，スピンの向きが運動方向と同じもの $(+1/2)$ と逆のもの $(-1/2)$ の二種類があることになる．前者を右巻き，後者を左巻きと呼ぶ．

相対論的な理論では，**カイラリティ(chirality)** という量が基本的な役割を果たす．相対論的なフェルミ粒子は，ディラック方程式 (2.2)

$$0=\Big(-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m\Big)\psi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{ipx}\Big(\gamma^{\mu}p_{\mu}+m\Big)\widetilde{\psi}(p) \quad (4.1)$$

を満たす場 $\psi(x)$ で記述される．四次元運動量表示の場 $\widetilde{\psi}(p)$ によって生成消滅される粒子が，相対論的なエネルギー p^0 と運動量 $\boldsymbol{p}$ の関係

$$0=(p_{\mu})^2+m^2\ ,\qquad (p_{\mu})^2\equiv\eta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}=-\big(p^0\big)^2+(\boldsymbol{p})^2 \quad (4.2)$$

を満たすためには，$\gamma_{\mu}=(\gamma_0,\,\boldsymbol{\gamma})$ は反交換関係

$$\{\gamma_{\mu},\,\gamma_{\nu}\}=-2\,\eta_{\mu\nu}=-2\,\mathrm{diag}\,(-,+,+,+) \quad (4.3)$$

を満たす 4×4 行列でなければならない．このとき，$\gamma_5\equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ と定義すると $\gamma_5^2=1$ なので，その固有値は ±1 である．しかも γ_5 がすべての γ_{μ} と反可換なことから，その固有値がローレンツ変換で不変な意味をもつこともわかる．フェルミ粒子の「右手型」と「左手型」を区別するカイラリティとは，この γ_5 の固有値のことである．すなわち

$$\psi_{\substack{\mathrm{R}\\ \mathrm{L}}}\equiv\frac{1\pm\gamma_5}{2}\psi\ ,\quad \begin{cases}\gamma_5\psi_{\mathrm{R}}=+\psi_{\mathrm{R}}\ :\text{右手型(right-handed)}\\ \gamma_5\psi_{\mathrm{L}}=-\psi_{\mathrm{L}}\ :\text{左手型(left - handed)}\end{cases} \quad (4.4)$$

がカイラリティの定まったフェルミ粒子を表す場である．これを用いると，ディラック方程式 (4.1) は

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)=m\,\psi(x)\iff\begin{cases}i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{R}}(x)=m\,\psi_{\mathrm{L}}(x)\\ i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}}(x)=m\,\psi_{\mathrm{R}}(x)\end{cases} \quad (4.5)$$

の形になる．

ゼロ質量 $m=0$ の場合，カイラリティ(右・左手型)とヘリシティ(右・左巻き)は一致する．これを示すために，ガンマ行列の具体的表示として

$$\gamma_{\mu}=\begin{pmatrix}0 & \sigma_{\mu}\\ \bar{\sigma}_{\mu} & 0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}\sigma_{\mu}=(\mathbb{1},\,+\boldsymbol{\sigma})\\ \bar{\sigma}_{\mu}=(\mathbb{1},\,-\boldsymbol{\sigma})\end{cases},\quad \gamma_5=\begin{pmatrix}+\mathbb{1} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix} \quad (4.6)$$

を採ろう．γ_5 を対角化するこの表示では，四成分の場 ψ の上下の二成分ずつ

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \psi_{\rm R} \equiv \frac{1+\gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\rm L} \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

が γ_5 の固有状態になる．これを運動量表示のディラック方程式 $0 = \gamma_\mu p^\mu \widetilde{\psi}(p)$ に代入すると，エネルギー運動量の関係 $p^\mu = (|\boldsymbol{p}|, \boldsymbol{p})$ から

$$\begin{cases} 0 \;=\; (\overline{\sigma}_\mu p^\mu)\,\widetilde{\xi} \;=\; (|\boldsymbol{p}| - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\,\widetilde{\xi} \\ 0 \;=\; (\sigma_\mu p^\mu)\,\widetilde{\eta} \;=\; (|\boldsymbol{p}| + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\,\widetilde{\eta} \end{cases} \Longrightarrow \quad \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2\,|\boldsymbol{p}|} = \begin{cases} +1/2 \\ -1/2 \end{cases} \tag{4.8}$$

である．確かに，右手型の $\psi_{\rm R}$ はヘリシティ $+1/2$ の右巻きであり，左手型 $\psi_{\rm L}$ はヘリシティ $-1/2$ の左巻き状態になっている．

このように，クォークやレプトンなどのフェルミ粒子には右手型と左手型の二種類があり，両者はカイラリティで区別される．現実の自然界では，弱い相互作用について右手型と左手型が対等でないので，**カイラリティの異なる粒子は，むしろ別の粒子とみなす方がよい．**このとき重要なことは，式 (4.5) からわかるように，右手型と左手型の一方だけでは質量をもてないことである*．その結果，もともとはゼロ質量であった 2 つの粒子が，「ある種の相互作用」を通じてペアを組んでいるのが，質量をもったフェルミ粒子なのだ，と考えることになる．ここでは立ち入らないが，標準模型ではヒッグス場(§ 2.3 参照)との湯川相互作用(Yukawa interaction)が，右手型と左手型のフェルミ粒子を結び付けて質量を与える役割をする．その意味では，われわれのクォークやレプトンは，ヒッグス場という「仲介者」がいないと質量をもてないような「あぶれ者？」だともいえる．

4.2　高次元理論はカイラルでない？

以上で説明したように，標準理論はカイラルな構造をもっており，その起源を明らかにすることは重要な課題である．そしてこのことは，余次元のあり方に対して大きな制限となる．実際，素朴なやり方で余次元のコンパクト化して得られる四次元理論はカイラル構造をもたない，つまり左右対称になってしま

* 最近，ニュートリノの質量がホットな話題になっているが，これは左手型のニュートリノに右手型の相棒があるかどうかという問題につながっている．

うのである．ここでは，その理由を五次元のフェルミ場 $\Psi(x,y)$ で考えよう．

まず五次元時空でのディラック方程式やガンマ行列 Γ_M $(M=0,1,2,3,5)$ について述べておく．四次元のガンマ行列 (4.6) と $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ を用いると

$$\{\Gamma_M,\, \Gamma_N\} = -2\eta_{MN} \equiv -2\mathrm{diag}\,(-,+,+,+,+) \tag{4.9}$$

を満たす五次元の Γ_M を，$\Gamma_\mu = \gamma_\mu$ および $\Gamma_5 = i\gamma_5$ で構成することができる．したがって，五次元でのディラック方程式は，質量を W と書くことにすると

$$0 = \Big[i\Gamma^M\partial_M - W\Big]\Psi = \Big[i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma_5\partial_y - W\Big]\Psi(x,y) \tag{4.10}$$

ここで重要なことは，γ_5 がほかの γ_μ $(\mu=0,1,2,3)$ と対等になったことである．そのために，γ_5 の固有値として定義されていた四次元のカイラリティは，もはや五次元のローレンツ変換のもとで不変な概念でない．たとえある座標系で，右手型のフェルミ場を $\Psi_\mathrm{R} = (1+\gamma_5)\Psi/2$，左手型を $\Psi_\mathrm{L} = (1-\gamma_5)\Psi/2$ と定義したとしても，ローレンツ変換した別の座標系では両者は混ざりあってしまうのである*．したがって，五次元時空全体のローレンツ対称性を保つ限り**，Ψ_R か Ψ_L のいずれか一方だけを含んだ理論はあり得ないことになる．

このような事情で，高次元から素直に得られる四次元フェルミ場の理論では，右手型 Ψ_R と左手型 Ψ_L が対等に現れてしまう．したがって高次元理論を考える際には，「如何にしてカイラル構造を導き出すか」が重要な課題となる．

後の議論(次節および§ 6.2)の準備として，五次元目を $\boldsymbol{S}^1$ にコンパクト化した場合を少し詳しく取り扱っておこう．$\boldsymbol{S}^1$ 上のフェルミ場は，スカラー場に対する式 (3.3) と同様に，KK モードに展開される．簡単のため，規格化定数を無視すると，$\Psi_\mathrm{R}(x,y)$ と $\Psi_\mathrm{L}(x,y)$ のそれぞれに対して

$$\Psi_\mathrm{R}(x,y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \psi_\mathrm{R}^{(+n)}(x)\cos\frac{ny}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_\mathrm{R}^{(-n)}(x)\sin\frac{ny}{R} \tag{4.11}$$

---

* これは，四次元時空のローレンツ変換で電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が互いに混ざりあうのと似ている．詳しくは回転群の知識[14)]が必要だが，要点だけ述べておく．Ψ に作用する五次元ローレンツ変換の生成子は $\Sigma_{MN} = -(1/4)\,[\Gamma_M,\, \Gamma_N]$ で与えられるが，x^5 方向へのローレンツ生成子 $\Sigma_{\mu 5}$ を表示 (4.6) を用いて表すと，これがカイラリティを反転させることがわかる．

** 五番目の方向を $\boldsymbol{S}^1$ にコンパクト化すると，五次元時空 $\boldsymbol{R}^4 \times \boldsymbol{S}^1$ 全体のローレンツ対称性をもたなくなる．しかしすぐ後で示すように，$\boldsymbol{S}^1$ コンパクト化してもカイラルな四次元理論は得られない．

$$\Psi_{\mathrm{L}}(x,y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\mathrm{L}}^{(+n)}(x)\cos\frac{ny}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{\mathrm{L}}^{(-n)}(x)\sin\frac{ny}{R} \qquad (4.12)$$

と書くことができる．§ 3.1 で述べたように，ゼロモードの波動関数は y について定数 $\varphi_0(y) = 1/\sqrt{2\pi R}$ であり，上式第一項の $n = 0$ に含まれている．単純な $\boldsymbol{S}^1$ コンパクト化では，ゼロ質量フェルミ場は $\psi_{\mathrm{R}}^{(0)}(x)$ と $\psi_{\mathrm{L}}^{(0)}(x)$ の対になって現れるので，確かにカイラル非対称性が生じていない．なお，**ゼロモード $\boldsymbol{\varphi_0(y)}$ が $\boldsymbol{y}$ について偶関数である**ことが次節で重要な意味をもってくる．

4.3　カイラル非対称性をつくる——オビフォルド化

余次元の存在は，われわれの四次元世界のカイラル非対称性と矛盾してしまうのだろうか．実はそうではない．この節では，コンパクト化された理論でカイラルな構造を得るための手法——**オビフォルド化**——を紹介しよう．

そのためまず，五次元フェルミ場 $\Psi(x,y)$ に対する $\boldsymbol{Z}_2$ パリティ変換

$$\mathcal{P}_5 \,:\, \Psi(x,y) \longmapsto \Psi^{\mathrm{P}}(x,y) \equiv \gamma_5 \Psi(x,-y) \qquad (4.13)$$

に着目しよう．五番目の座標 y を反転したので，γ_5 が掛かっていることが重要である．なお，この変換が五次元パリティ変換であることは，ディラック方程式 (4.10) から確かめられる*．つまり，γ_5 が γ_μ と反交換することに注意すると

$$\left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \gamma_5 \frac{\partial}{\partial y}\right]\Psi^{\mathrm{P}}(x,y) = -\gamma_5\left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \gamma_5 \frac{\partial}{\partial(-y)}\right]\Psi(x,-y)$$

が成り立つので，$\Psi^{\mathrm{P}}(x,y)$ が $\Psi(x,y)$ と同じディラック方程式を満たすのである．

$\boldsymbol{Z}_2$ 変換 (4.13) を四次元カイラリティの固有状態 (4.4) で書き直すと

$$\begin{cases} \Psi_{\mathrm{R}}(x,\,y) & \longmapsto \quad \Psi_{\mathrm{R}}^{\mathrm{P}}(x,\,y) = +\Psi_{\mathrm{R}}(x,\,-y) \\ \Psi_{\mathrm{L}}(x,\,y) & \longmapsto \quad \Psi_{\mathrm{L}}^{\mathrm{P}}(x,\,y) = -\Psi_{\mathrm{L}}(x,\,-y) \end{cases} \qquad (4.14)$$

となる．面白いのは，Ψ_{R} と Ψ_{L} で変換性が逆になっていることである．特に，$\boldsymbol{Z}_2$ **不変な状態**に注目すると

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{Z}_2 \text{ 不変:} \\ \Psi^{\mathrm{P}}(x,y) = \Psi(x,y) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{偶関数:}\ \Psi_{\mathrm{R}}(x,y) = +\Psi_{\mathrm{R}}(x,-y) \\ \text{奇関数:}\ \Psi_{\mathrm{L}}(x,y) = -\Psi_{\mathrm{L}}(x,-y) \end{array}\right. \qquad (4.15)$$

---

* 五次元パリティ不変なフェルミ粒子は，単独ではゼロ質量 $W = 0$ でないといけない．

が成り立つので，右手型は(yについて)偶関数になり，左手型は奇関数になる．

いま「**$\boldsymbol{Z}_2$ 不変な状態 (4.15) のみが物理的な状態として現れる**」ように理論**全体を制限(あるいは状態空間を射影***)するとどうなるだろう．すると，右手型の $\Psi_{\rm R}(x,y)$ は偶関数に制限されるから，ゼロモードが生き残るのに対し，奇関数 $\Psi_{\rm L}(x,y)$ のゼロモードは取り除かれることになる．こうして，右手型のゼロ質量場 $\psi_{\rm R}^{(0)}(x)$ だけを含む四次元有効理論が得られるのである．

このようにしてカイラルな理論を得る手続きは，**オビフォルド(orbifold)化**と呼ばれている．これは超弦理論のコンパクト化で最初に考案されたものであった[15,16]が，最近は点粒子の場の理論でもよく用いられている(章末参照)．

オビフォルドの理論では，$\boldsymbol{Z}_2$ 変換によってオビフォルド化される対象として，時空自身と場の自由度の2つがある．まず五次元時空のオビフォルド化とは，$(x^\mu,\, y)$ と $(x^\mu,\, -y)$ を同じ点とみなすことを意味する．対称性の変換で移りあう時空点の軌道(orbit)を同一視して，領域 $y<0$ を $y>0$ に折りたたむ(folding)のである．

例えば，オビフォルド空間 $\boldsymbol{R}^1/\boldsymbol{Z}_2$ は直線 $\boldsymbol{R}^1$ を原点で折り返した「半直線」と同等である．半径 R にコンパクト化された $\boldsymbol{S}^1$ の場合，五次元目の座標 y は，周期性と併せた同一視

$$y \sim -y + 2\pi w R \qquad (\, w\, =\, 0,\, \pm 1,\, \pm 2, \cdots) \tag{4.16}$$

を満たすので，$\boldsymbol{Z}_2$ 変換で固定される点 $y_0 \equiv 0$ $(w=0)$ と $y_1 \equiv \pi R$ $(w=1)$ が存在する．そのため，商空間 $\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ (これは線分 $[0,\, \pi R]$ と等価)はなめらかな多様体ではなく，一般に特異点(今の場合は端)をもった空間である**.

内部自由度のオビフォルド化として，まずフェルミ場を考えよう．フェルミ場の $\boldsymbol{Z}_2$ 変換には，場ごとに符号因子 $\eta_2(\Psi) = \pm 1$ を付け加えて

---

* 式 (2.5) の下で述べたような同一視をするという意味で，このことを $\boldsymbol{Z}_2$ パリティ対称性の「ゲージ化」と呼ぶこともある．

** 二次元トーラスを $\boldsymbol{Z}_3$ 変換($2\pi/3$ 回転)で同一視した $\boldsymbol{T}^2/\boldsymbol{Z}_3$ オビフォルドでは，固定点が3つ現れるため，「三角形の座布団」のような空間になる．固定点での特異性のため，点粒子の場の量子論がオビフォルド空間上で構成的に定義できるかは自明でない．一方，弦理論ではこの特異性が無害であることが知られている[15]．$\boldsymbol{Z}_3$ 不変な状態を取り出すだけでなく，固定点に「巻き付く」状態が新たに生まれ，量子論的な整合性(異常項相殺)が保たれるのである．その結果，得られる理論はいくつかのゲージ理論を「張り合わせた」ような構造になっている[17]．

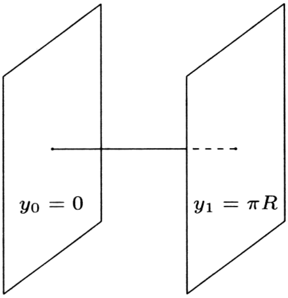


図 4.1　$\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ オビフォルドにコンパクト化された五次元時空．$y=0$ と $y=\pi R$ の超平面はオビフォルドの固定面と呼ばれ，その間に挟まれた五次元時空の境界(果て)と考えられる．

$$\Psi(x,y) \longmapsto \Psi^{\mathrm{P}}(x,y) \equiv \eta_2(\Psi)\,\gamma_5\Psi(x,-y) \qquad (4.17)$$

とする自由度がある．例えば，$\eta_2(\Psi)=+1$ に相当する式 (4.14) は，$\boldsymbol{Z}_2$ 不変な配位に制限すると，右手型フェルミ場の四次元理論を与えるものであった．逆に $\eta_2(\Psi)=-1$ と選べば左手型のゼロモードが生き残ることになる．

同様に，五次元ゲージ場 $A_M(x,y)$ の $\boldsymbol{Z}_2$ 変換

$$A_\mu(x,y) \longmapsto \eta_2(A)\,A_\mu(x,-y)\ , \quad A_5(x,y) \longmapsto -\,\eta_2(A)\,A_5(x,-y)$$

における符号 $\eta_2(A)=\pm 1$ の選び方に応じて, KK モード展開 (3.8) のどのモードが四次元理論に残るかが決まる．特にゼロモードに着目すると，$\eta_2(A)=+1$ なる五次元ゲージ場からは四次元ゼロ質量ゲージ場 $A_\mu^{(0)}(x)$ が得られ, $\eta_2(A)=-1$ のときは四次元ゼロ質量スカラー場 $A_5^{(0)}(x)$ が取り出されることになる．

途中でも述べたが，このようなオビフォルド化された余次元の可能性は，最近いろいろな文脈で興味をもたれている．例えば，ここでは一切立ち入らないが，超対称弦理論で調べられてきたオビフォルドの考え方を点粒子の理論に積極的に取り入れることによって,「超対称性」の破れや「大統一理論のゲージ対称性」の破れを実現する可能性などが指摘されている[18)]．高次元理論を $\boldsymbol{Z}_N$ オビフォルドにコンパクト化する場合，オビフォルドのツイスト(twist)とも呼ばれる $\boldsymbol{Z}_N$ 位相 η_N の選び方に応じて，様々なゲージ群や様々な表現の物質場を含む統一理論を構成することができるのである．

5章 ブレイン世界――弦理論が示唆する時空

1998 年春,「ミリメータ程度に余次元が存在するのではないか」とする衝撃的な論文[19]が現れた.「ブレイン世界」という新しい考え方に立てば,これまでの観測や実験に矛盾することなく余次元世界の存在が可能であり,しかも近い将来,重力の実験や高エネルギー加速器を用いて検証されるかもしれない[20]というのである.しかしそのためには,超弦理論の最近の発展を踏まえておく必要があるだろう.(§ 5.1 や 5.2 では,特殊な専門用語が並ぶかもしれないが,あまり気にせず読み進んでその雰囲気をつかんでほしい.)

素粒子論の研究を進めるのには,大まかに 2 つの道筋がある.ひとつは第一原理から出発して整合性を満たす理論を構築し,その理論から予測される結果を現象とつきあわすというアプローチである.一般相対論やディラックの電子論はこの典型である.超弦理論から出発して現実世界に接近しようとするのも,このタイプである.この「トップダウン」方式では,果たして超弦理論が現実世界を記述するか否か,今のところ手掛かりがないことが問題である.また,たとえ超弦理論が真実だとしても,それを現実世界につなげるにはいくつかの紆余曲折があるかもしれない.道程はまだ遠い.

これに対して,すでに判明している事実や様々な現象から出発して,その背後にある真実を一歩ずつ探っていこうとする「ボトムアップ」方式がある.これら 2 つのアプローチが互いに補いあいながら,アイデアを交換したり,どの程度共通の認識にたどり着いたのかを検討することも重要になる.この章では,トップダウンのアプローチから何が示唆されているかを概観し,次にそれを承けて,隠れた次元を想定するとどのような利点があるのか,これが最もセンセーショナルな形で現れた「ミリメータサイズの余次元」のシナリオを紹介しよう.

5.1　弦理論と時空のコンパクト化

20 世紀になって物理学は，場の量子論と一般相対論という基礎的な理論の枠組みを獲得した．しかしいまだに，これら 2 つを融合することには成功していない．その矛盾の接点に**重力の量子化**がある．量子重力を含む統一理論の構築こそが，新世紀の素粒子論にとって最大の課題である．

ここ 20 年来，発散を含まない量子重力理論として注目を集めてきたのが超対称な弦理論である[21,22]．1983 年に量子論としての整合性(いわゆる異常項相殺)を保証する機構[23]が発見されて以来，超弦理論は量子重力を含む統一理論の最有力候補として脚光を浴びることとなった．超弦理論の詳しい解説はここでの目的ではないが，重要なのは，超弦理論が矛盾なく定式化できるためには，時空の次元が $10 = 4 + 6$ でなければならないということである．つまり，量子重力を超弦理論としてきちんと定式化しようとすると，(実験的な根拠はないが)理論の整合性から，どうしても**高次元の時空を考えざるを得ない**のである．

弦理論では，紐状に拡がった「万物の素」を考える．今まで考えていた素粒子は，それらの弦が点状に縮まった極限と解釈される．このような弦理論の特徴は，主に 2 つの面から捉えることができる．

第一の特徴は，弦が重心運動のほか，振動エネルギーや振動方向の自由度(角運動量)をもつので，様々な質量やスピンをもった素粒子が現れることである．特に弦を矛盾なく量子化すると，弦が閉じているか開いているかに応じて，ゼロ質量の重力場やゲージ場が現れる．(さらに，超対称な弦理論は半整数スピンをもつ物質粒子も含む.)

この重要な事実は直観的には次のように理解できるだろう．まず開弦は，その端点が荷電粒子のようにみなせるので，あたかも端点から放射されるゲージ場のように振る舞う．一方，閉弦では右向きと左向きの進行波が独立に存在するので，定常波しかない開弦に比べて，振動の自由度(スピン)がちょうど 2 倍ある．つまり

$$\begin{cases} \text{閉弦(closed string)} & \Longrightarrow \quad \text{重力場(スピン 2)} \\ \text{開弦(open string)} & \Longrightarrow \quad \text{ゲージ場(スピン 1)} \end{cases} \tag{5.1}$$

また特殊な方法を用いると，これら両方の特徴を併せもった弦を構成すること

ができ，そのような混成弦(heterotic string)の理論は重力場とゲージ場を同時に含んだものになっている．

第二の特徴は，弦が拡がりをもっているおかげで，短距離(高エネルギー)での特異性——紫外発散——がないことであり，この点が点粒子と大きく異なっている．点粒子の場 (2.9) は短距離極限 $r \to 0$ で無限大になることに注意しよう．大きさのない点粒子は幾らでも短波長の波と結合してしまうため，式 (2.7) に見られるように，それを全部加えると無限大の答えが出てしまう．それに対し，弦はその拡がり以下の波長の波とは結合しないので，短距離での発散を含まない．このようにして弦理論は，一方で低エネルギー有効理論として重力場やゲージ場を含み，他方で紫外発散のない理論になっているのである．

すでに述べたように，超弦理論は初めから高次元を必要とする理論である．この理論が現実世界を記述するものであるためには，10 次元時空がわれわれの四次元時空とコンパクトな六次元空間に分解していると考えざるを得ないだろう．そして，コンパクト空間の大きさは，量子重力の効果が顕著になるスケール，つまりプランク長さ (1.3) で決まるだろう．こうして弦理論では，素朴な期待として，余分の六次元がプランク長さ $\ell_{\rm pl} \approx 10^{-34}$ m 程度の大きさにコンパクト化されると考えることになる*.

このようなコンパクト化された余次元は，量子重力を定式化する目的からすると「必要悪」のようなものである．しかし超弦理論は，量子重力だけでなく，統一理論としての側面ももつことを喚起しておこう．第 3 章で述べた KK 理論がそうであったように，超弦理論では，素粒子やその相互作用の**多様性の起源をコンパクト化された内部空間の幾何学的性質に求める**ことになる．つまり，高度なゲージ対称性をもち，少数の結合定数をもつ超弦理論から出発することで，四次元でのゲージ対称性や世代数，さらに様々な結合定数を原理的には決めることができるのである．なかでも混成弦の理論は，多様なゲージ対称性と豊富な物質場を含んでおり，“現象論” 的に有望視され精力的に調べられてきた．

時空のコンパクト化などという素粒子論の考え方は，他分野の研究者には，いかにもご都合主義に感じられるかもしれない．しかしアインシュタイン以来，

* 逆に，すべての方向が $\ell_{\rm pl}$ 程度の原始宇宙から，われわれの三次元空間だけが膨張(decompactification)したという発想もある[24]．

われわれは重力現象を通じて時空間を動的なものと捉えてきたはずである．弦理論では，その延長線上に，重力の量子効果を通じて時空間の**次元さえも動的なものとして捉える**ことを目指そうというのである．つまり，「何故，高次元時空が四次元と余次元に分解されるのか」，「どのような機構でコンパクト化が起こるのか」を説明することが大きな目標となる．しかし残念ながら，場の微小ゆらぎのみを取り扱う摂動論(perturbation theory)で考える限り，それは「夢物語」に過ぎなかった．また，余次元の存在がはるか彼方のプランクスケールまでその片鱗を見せないのだとすると，その実在性を検証することなど，遠い未来の話でしかないとして今までずっと無視されてきた．

5.2　非摂動的な弦理論と D ブレイン——ゲージ場の局在化

ところがここ数年来，新しい動きが現れてきた．超弦理論の非摂動効果についての理解が急速に深まり，点状・紐状・膜状など，様々な次元の拡がりをもつ**ブレイン(brane)** の重要性が認識されるようになった*．なかでも特に注目されることは，超弦理論には予想外に多様なゲージ場が含まれていることであろう．従来，超弦理論のゲージ場は，開弦に含まれるにせよ，混成弦に含まれるにせよ，いずれも 10 次元時空全体を伝播すると考えられてきたが，必ずしもそうではないことが明らかになったのである．

簡単のため，II 型と呼ばれる超弦理論に沿った説明をしよう．この理論は元来，閉弦のみを含む理論であり，多彩なゲージ場をもつ標準模型にはつながらないものと考えられていた．しかし，**D ブレイン(Dirichlet brane)**と呼ばれる非摂動的“古典解”が発見され，そのブレイン上の励起モードとして，新たにゲージ場が現れることがわかったのである[22,26]．D ブレインとは，図 5.1 のように，開弦の端がその上に束縛される壁(あるいは膜)として特徴づけられる．開弦が縮まる極限でゲージ場が現れるのであったから，このことは**ゲージ場が D ブレイン上に束縛(あるいは局在)している**ことを意味する．

以上のような非摂動的弦理論は，**高次元時空における場の新しい存在様式を提示している**と考えられる．重力場(閉弦)は時空全体——ブレインに対してバ

---

* $p+1\,(=0,1,\cdots,10)$ 次元時空に拡がった膜(membrane)状のものを p-brane と呼ぶ[27]．pea brain (豆粒みたいにちっちゃい頭)に掛けたタウンゼント(P. Townsend)の洒落．

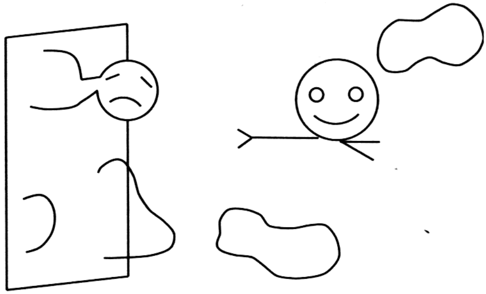


図 5.1　時空全体を伝播する閉弦(重力場)と D ブレインに束縛された開弦(ゲージ場).

ルクという——を伝播するのに対し，開弦として現れるゲージ場(やその源となる物質場)はブレイン上に束縛されていて，その外の世界には飛び出してこない．D ブレインが存在すると，閉弦と開弦の違いに応じて，重力場とゲージ場の「住み分け」が可能になるのである．さらにまた，いろいろな次元をもつブレインが可能なので，ゲージ場のあり方はますます多様ということになる*．

ここで想起されるのは，§ 2.3 で述べたように，標準模型の四次元世界でさえゲージ場のあり方が多様であったことである．特に，強い相互作用の色ゲージ場が一次元的に局在していることは示唆的である．図 2.2 にあるように，色ゲージ場の電気力線が紐状に絞り込まれているので，その太さより長いスケールから色ゲージ場をセンサーとして見る限り，クォークは空間を一次元と認識する．このことからも，多様な個性をもったゲージ場が高次元の中で住み分ける可能性が想像できるだろう**．また，いろいろな相互作用の性質の違いを余次元への拡がり方の違いに基づいて説明する可能性や，さらに進んで，われわれの四次元世界そのものを動的に導く可能性も，決して夢物語ではなく，現実感をもってくる．

---

* 他の超弦理論でも事情は似ている．I 型の理論に最初から含まれる開弦は，10 次元時空全体を覆う D9-brane に端点が「束縛」されているものと再解釈される．いわば，開弦の「再発見」である．混成弦では事情が複雑だが，同様の予想がなされている[30]．ホジャバ(P. Horăva)とウィッテン(E. Witten)によれば，$E_8 \times E_8$ 型の混成弦理論の強結合極限は，もうひとつ次元の高い 11 次元の理論——M 理論——を $\boldsymbol{Z}_2$ オビフォルド(§ 4.3 参照)にコンパクト化したものである．そして，重力場が 11 次元全体を伝播するのに対し，ゲージ場は 10 次元の境界面(オビフォルドの固定面)上に束縛されるというのである．

** 高次元ゲージ理論の相構造について，最近の議論が例えば文献 28,29) にある．

5.3　ブレインワールド——大きな余次元の可能性

非摂動的な超弦理論から示唆される重要なことは，余次元に拡がる場と拡がらない場があるということである．われわれの四次元宇宙を高次元に埋め込まれたブレインとみなすと，われわれの観測している場も，ブレイン外の余次元にも拡がるものかもしれないし，ブレイン内に閉じ込められて(あるいは，その付近に局在して)いるものかもしれない．すなわち

$$\begin{cases} \text{バルク (bulk) の場：余次元空間にも拡がる重力場など} \\ \text{ブレイン (brane) の場：ブレインに束縛されたゲージ場など} \end{cases} \tag{5.2}$$

このような可能性を積極的に取り入れて，標準模型を再検討・拡張していこうとする試みを「ブレイン世界」のシナリオと呼んでいる．そこでは，必ずしも超弦理論の D ブレインに限定しないで，自由な発想で(ボトムアップ流に)考えていくことになる．

このような「ブレイン世界」の考え方が，最も端的に現れるひとつの例として，アルカニハミッド(N. Arkani-Hamed)らによって提唱された**「大きな余次元」(large extra dimensions)** のシナリオ[19]を紹介しよう．§ 1.2 でも述べたが，重力の法則に現れるプランク質量 $m_{\rm pl} \approx 10^{18}\,\text{GeV}$ を「基礎スケール」とみなす立場からみると，標準模型のスケール $m_{\rm EW} \approx 100\,\text{GeV}$ は余りにも小さい．関係 (1.2) と (1.3) を用いて，重力の強さ $G_{\rm N}$ と電弱相互作用の強さ $G_{\rm F}$ で表すと

$$\frac{G_{\rm N}}{G_{\rm F}} \sim \frac{m_{\rm EW}^2}{m_{\rm pl}^2} \sim \left(10^{-16}\right)^2 \tag{5.3}$$

もの階層性が存在するのである．標準模型の質量スケールが何故これほどまでに小さいのか，という問題は(プランク)**階層性問題(hierarchy problem)**と呼ばれ，重力を含めた統一理論を目指すとき非常に悩ましい問題である．

アルカニハミッドらは，この問題を逆の発想で見直してみた．むしろ $m_{\rm EW}$ の方 が基本的なスケールなのではないか，そしてプランク質量の巨大さ，われわれの観測する重力が他の力に比べて極端に弱いことこそが説明されるべき事実ではないのか？ —— そもそも，$m_{\rm EW}$ が弱ゲージ粒子の質量として実証されたスケールであるのに対し，$m_{\rm pl}$ というスケールは次元勘定で読み取られたも

のであった．しかし，その根拠である重力の法則(万有引力の法則)

$$V(r) = -G_{\mathrm{N}}\,\frac{m_1 m_2}{r} = -\left(\frac{m_1 m_2}{m_{\mathrm{pl}}^2}\right)\frac{1}{8\pi r} \tag{5.4}$$

は，よく考えると mm 以下の長さでは実験でまだ検証されていないので，それがプランク長さまで成り立つというのはわれわれの思い込みだったのではないか？ ——というのである．ミリメータ領域というと，ゲージ場をセンサーに用いて検証済みのはずであった．しかしブレイン世界の考え方 (5.2) を採用すると，ゲージ場やその源となる物質場(クォークやレプトン)はブレイン上に閉じ込められているので，その力が通常の法則(表 2.1)に従うことは保証されているのである．

一方，重力場はバルクの全時空を伝播する．§ 3.3 で述べたことから*，重力場が余次元に拡がる効果は，重力のべき則やその結合定数の大きさに反映するはずである．いま $D = 4 + d$ 次元時空を考え，余分の d 次元はどの方向も半径 R にコンパクト化されているとしよう．$D = 5$ 次元の場合に式 (3.14) が成り立つように，二粒子間の距離 r が R 程度を境にしてポテンシャルのべき則が変化する．$D = 4 + d$ 次元では式 (2.11) のべき則が成り立つから，半径 R 以下の短距離での重力ポテンシャルは

$$V(r) = -G_{(4+d)}\,\frac{m_1 m_2}{r^{1+d}} = -\frac{m_1 m_2}{M_D^{2+d}}\,\frac{1}{r^{1+d}} \quad \text{for} \quad r \lesssim R \tag{5.5}$$

という形になる．ここで $G_{(4+d)}$ は $4 + d$ 次元での重力定数であり，$V(r)$ がエネルギーの次元 L^{-1} になるように $G_{(4+d)} \equiv 1/M_D^{2+d}$ と表した．M_D は $4 + d$ 次元でのプランク質量にあたる．これら 2 つの表式 (5.4)–(5.5) は距離 $r \sim R$ で一致しなければならないから，$G_{(4+d)}$ や M_D と四次元における G_{N} や m_{pl} の関係を

$$G_{\mathrm{N}} \sim \frac{G_{(4+d)}}{R^d}\,, \qquad m_{\mathrm{pl}}^2 \sim M_D^{2+d} R^d \tag{5.6}$$

と読み取ることができる．これは，式 (3.17) と同様に，**重力場のゼロモードが余次元の体積 R^d に比例して薄まる**ことを表している．G_{N} の値は観測からわ

*大きな余次元シナリオの場合，KK モードの質量 $1/R$ が標準スケール m_{EW} より小さいので，第 3 章の「KK モード展開」より，むしろ「余次元方向への運動」という描像の方がいい．

かっているので，半径 R が大きければ大きいほど，高次元での重力定数 $G_{(4+d)}$ が大きいことになる．こうしてブレイン世界の考え方に基づけば，式 (5.3) にある**四次元重力の弱さ（プランク質量の巨大さ）がみかけのものかもしれない***ことを簡単な模型で示して見せたのは，このシナリオの重要な点である．

重力の法則に変更が現れるスケールを計算してみよう．例えば $D = 4 + 2$ 次元の場合を考えると，余次元の大きさのスケールは $R \sim m_{\rm pl}/M_D^2$，すなわち

$$R \sim \left(\frac{M_D}{1\,\mathrm{TeV}}\right)^{-2} \times 10^{-1}\ \mathrm{mm}\,, \quad \frac{1}{R} \sim \left(\frac{M_D}{1\,\mathrm{TeV}}\right)^{2} \times 10^{-3}\ \mathrm{eV} \quad (5.7)$$

となる．$G_{(4+d)} = 1/M_D^4$ と $G_{\rm F} \sim 1/m_{\rm EW}^2$ が同程度の強さになるよう，仮に $M_D \sim 10 m_{\rm EW} \approx 1\,\mathrm{TeV}$ だとすると，万有引力の法則 (5.4) からのずれが，0.1 mm あたりで見えてくることになる．またコンパクト化のエネルギースケール $1/R$ が四次元の宇宙項 (1.4) と同程度なのも示唆的である．

なお，コンパクト化の半径 R が高次元の‘基礎スケール’ $L_{\rm pl} \equiv 1/M_D \sim 10^{-18}\,\mathrm{m}$ よりもきわめて大きくなってしまうことに注意しよう．これは階層性問題の解決としては不満足な点である．また宇宙論の問題や（陽子安定性などの）素粒子物理のほかの問題を考慮すると，このシナリオをそのままの形で受け入れるか否かは意見が別れるところである．いずれにせよ，余次元のコンパクト化などというアイデアが，はるか彼方のプランク長さ $\ell_{\rm pl} \sim 10^{-34}\,\mathrm{m}$ の世界ではなく，近い将来の実験で探索・検証・実証可能な領域で起こっているかもしれない，という指摘は画期的であった．

* この可能性は超弦理論の文脈でウィッテン[31)]により指摘された．

6章 ドメイン壁と物質場の局在化

ブレイン世界の試みは，新しいタイプの高次元統一理論を目指すものである．この考え方を押し進めて，われわれの**四次元世界を動的（ダイナミカル）に理解するため**には，**高次元における場の性質やその局在化の機構**をよく理解しておくことが重要であろう．ここでは，ブレイン世界のエッセンスを，簡単な模型を用いて，ビジュアルな形で紹介したい．まずこの章では物質場の局在化を，そして次章では重力場の局在化を取り上げることにしよう．場の局在化を‘根拠づける’作業を通して，ブレインの織りなす豊かな世界を実感して頂きたい．

前章では，「そもそも何故，四次元時空のほかに，余次元などを考える必要があるのか」，「ブレイン世界の発想が如何にして生まれてきたのか」を説明した．しかしその理由は，「弦理論による重力の量子化」であったり，「弦理論の非摂動効果としての D ブレイン」であったり，雰囲気以上のことを理解するには専門的な知識がたくさん必要になる．もう少し簡単な理解はないものだろうか？

そこでまず § 6.1 では，スカラー場の理論を用いて，ブレインを構成する方法について紹介する．次に § 6.2 以降では，物質場の代表的な局在化の機構として，フェルミ場の局在化を取り上げる．その際，議論を簡単にするため，いったんコンパクト化のことを忘れて考えるが，コンパクト化していない余次元の可能性については第 7 章で取り上げる．

第 4 章で説明したように，四次元世界での物質（クォークやレプトンなど）の大きな特徴は，左右非対称性（カイラル非対称性）が存在することであり，余次元の物理でも，その起源を探ることが重要である．この章後半の目的は

(a)　「如何にして高次元の場を四次元時空に局在化させるか」と同時に

(b)　「如何にしてカイラル構造を導き出すか」

という 2 つの問いに答えることである．§ 6.2 では，余次元がまだコンパクト化

されていない場合にこれらの問題を解決する方法——キンクとの結合——を紹介する．§ 6.3 では，オビフォルド化の方法(§ 4.3)を併せて用いれば，コンパクトな余次元でも 2 つの目標が達成できることを述べる．

6.1　キンク解とドメイン壁——ブレインをダイナミカルにつくる

高次元のスカラー場 $\Phi(x, y)$ を用いて，ブレインをつくることを考える．具体的に，五次元スカラー場 $\Phi(x, y)$ の理論として，作用積分*

$$S_{\mathrm{H}}[\Phi] = -\frac{1}{g_{\mathrm{Y}}^2}\int \mathrm{d}^5 x \left[\frac{1}{2}\left(\partial_M \Phi\right)^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(\Phi^2 - v^2\right)^2\right] \tag{6.1}$$

で表されるものを考えよう．この作用から導かれる運動方程式は

$$\left[\partial^\mu \partial_\mu + \partial_y^2\right]\Phi = 2\lambda^2\left(\Phi^2 - v^2\right) \tag{6.2}$$

である．この運動方程式には，**キンク解**と呼ばれる特解が存在することがよく知られている．以下で，そのようなキンク配位の性質を調べよう．

作用 (6.1) の最後の項は，スカラー場のポテンシャルエネルギー

$$V(\Phi) = \frac{\lambda^2}{2g_{\mathrm{Y}}^2}\left(\Phi^2 - v^2\right)^2 \tag{6.3}$$

を表す．図 6.1 からわかるように，エネルギーが最低になる状態には $\langle\Phi\rangle = \pm v$ の 2 つがあるが，基底状態として実現されるのはそれらの**どちらか一方**である．もとのポテンシャルは $\Phi \longleftrightarrow -\Phi$ のもとで左右対称であったにもかかわらず，基底状態は対称な値 $\langle\Phi\rangle = 0$ ではなくなっている．これは「対称性の自発的な破れ」(spontaneous symmetry breaking) と呼ばれる現象の一例である．

自発的に破れた対称性の考え方は，物理のいろいろな分野で重要な役割を果たすものである．これまでの章でも，素粒子物理での例が何度か登場した．例えば，弱い相互作用のゲージ粒子に質量を与えたり (§ 2.3)，右手型と左手型の仲を取り持って，フェルミ粒子に質量を与える(§ 4.1)「ヒッグス機構」がそれである．いずれの場合も，多様な現象の背後に美しい対称性が隠されているのであった．そしてわれわれは，このような「隠された対称性」の考え方の経験を活用し，ブレインを動的(ダイナミカル)に構成することで，「隠された次元」へ挑戦しようというわけである．

*§ 6.2 での都合上，次元 $L^{1/2}$ をもつ定数 g_{Y} を入れた．

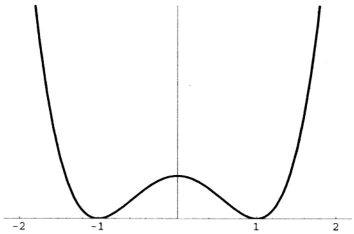


図 6.1　スカラー場に対するポテンシャル．横軸は Φ/v であり，$\Phi/v = \pm 1$ のどちらか一方が最小エネルギー状態．

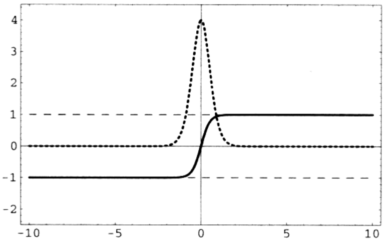


図 6.2　**スカラー場のキンク配位**($v > 0$，$\lambda = 2.0$ の場合)．横軸は($1/v$ を単位に測った)五次元目の座標 y，縦軸は $W(y)/v$．

さて先ほど述べたように，エネルギーをなるべく小さくするには，スカラー場の値 $\langle \Phi(x,y) \rangle$ が，すべての時空点でポテンシャルの底 $\pm v$ になるのが得である．いま何らかの理由で，場の値が y 方向のおおよそ右半分の領域($y > 0$)では $+v$，左半分の領域($y < 0$)では $-v$ となったとしよう．ほとんどの場所では，スカラー場が依然としてポテンシャルの底にあるので，エネルギーはそれほど大きくならない．しかし，左右の領域の境目の付近では，スカラー場がポテンシャルの壁を乗り越えて，$+v$ と $-v$ の間をつながなければならない．結果的に，**領域の境界($y = 0$)の付近にエネルギーがたまる**ことになる．

この状況は次のようにたとえるとわかりやすいだろう．もしある人が，全く正反対の意見をもった大多数の人たちの「板挟み」になったとすると，その人は(精神的にもエネルギー的にも)「ストレス」を感じることになるだろう．それと同様に，$y = 0$ 付近のスカラー場は，$+v$ の状態と $-v$ の状態の間に挟まれて，「ストレス」を感じているのである(図 6.3 参照)．

このようなスカラー場の配位は**キンク解**と呼ばれている．ここでは，x^μ 方向には一様だが，y 方向には変化する配位 $\langle \Phi(x,y) \rangle = W(y)$ を調べよう．具体的には，運動方程式 (6.2) と境界条件

$$\partial_y^2 W = 2\lambda^2 \left(W^2 - v^2\right) W \ , \qquad W(y) \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} \pm v \tag{6.4}$$

を満たす特解を求めればよい．その結果

$$W(y) = v \tanh(\lambda v y) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} v\,\epsilon(y) \equiv \begin{cases} +v & (\,y > 0\,) \\ -v & (\,y < 0\,) \end{cases} \tag{6.5}$$

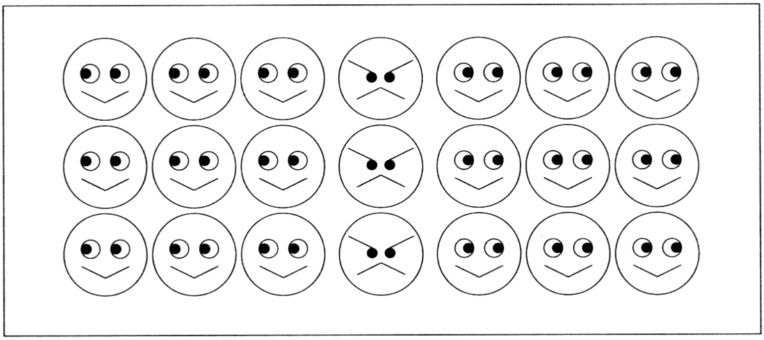


図 6.3　「板挟み」になった人がストレスを感じるのと同様に，スカラー場のキンク配位では，$+v$ の領域と $-v$ の領域に挟まれた境界面にエネルギーがたまり，ブレインができる．

となる．ただし，キンクの位置は原点 $y=0$ に選んだ*．また，この配位を作用 (6.1) に代入すると，スカラー場の蓄えているエネルギー密度 $\mathcal{E}(y)$ は

$$S[\Phi=W]=-\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}y\,\mathcal{E}(y)\ , \quad \mathcal{E}(y)=\left(\frac{v^4}{g_{\mathrm{Y}}^2}\right)\frac{\lambda^2}{\cosh^4(\lambda v y)} \qquad (6.6)$$

となり，全エネルギーは

$$T\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\mathcal{E}(y)=\frac{4\lambda v^3}{3g_{\mathrm{Y}}^2} \qquad (6.7)$$

と計算できる．

図 6.2 では，スカラー場の配位 $W(y)$ を実線で表し，各点におけるスカラー場のもつエネルギー密度(を v^4/g_{Y}^2 で割った値)を点線で示した．原点 $y=0$ の近傍にエネルギーが集中していることがわかるだろう．特に，スカラー場の自己相互作用が強くなる極限 $\lambda\to\infty$ を考えると，キンク配位 $W(y)$ は階段型 $v\,\epsilon(y)$ になり，**五次元時空 (x^μ, y) の特定の場所 $(x^\mu, y=0)$ に四次元的な境界面(domain wall)ができたことになる**．超弦理論で出てきた D ブレインも，同様なやり方でつくることができると考えられている**．

* キンクの中心を表す自由度が，ブレインを用いた余次元の物理で果たし得る役割については，文献 34) で調べられている．また，並進不変性を自発的に破る配位が基底状態として実現する例が文献 35) で調べられている．

** 式 (6.7) はブレインが x^μ 方向の「単位四次元体積」あたりにもつエネルギー密度に対応し，**ブレインの張力(tension)**と呼ばれる．今の場合，これは $\lambda\to\infty$ の極限で無限大になるので，ここでつくったブレインは無限に固いものになっている．

6.2 カイラルな物質場の局在化

次に，§ 6.1 でつくったキンク的な配位があると，高次元の場が局在することを示そう．ここでは，最も簡単な例として，五次元フェルミ場を考える．

第 4 章で述べたように，高次元フェルミ場の理論を考えるには，左右非対称性(カイラル非対称性)が重要である．したがって (a)「如何にして四次元時空に場を局在化させるか」と同時に，(b)「如何にしてカイラル構造を導き出すか」が課題であった．結論からいうと，§ 6.3 で述べるように，コンパクト化された余次元で，これら 2 つの問題を同時に解決することが可能である．面白いことに，フェルミ場 $\Psi(x,y)$ をキンク配位をもったスカラー場 $\Phi(x,y)$ と結合させると，フェルミ場は右手型か左手型かに応じて，異なる局在化の様子を示すのである．この節ではまず，コンパクト化をする前に，カイラルなフェルミ場の局在化を考察しよう[36]．

具体的に，五次元のフェルミ場 $\Psi(x,y)$ がスカラー場 $\Phi(x,y)$ の系 (6.1) と結合する系(Higgs–Yukawa 系)として，作用積分

$$S_{\mathrm{HY}}[\Psi,\Phi] = \int \mathrm{d}^5x\,\overline{\Psi}\left(i\Gamma^M\partial_M - \Phi\right)\Psi + S_{\mathrm{H}}[\Phi] \tag{6.8}$$

で表されるものを考えよう．湯川相互作用項 $\overline{\Psi}\Phi\Psi$ は，($\boldsymbol{Z}_2$ 不変でない)フェルミ場の質量項を，$\boldsymbol{Z}_2$ パリティ変換

$$\Psi(x,y) \longmapsto \gamma_5\Psi(x,-y)\ , \qquad \Phi(x,y) \longmapsto -\Phi(x,-y) \tag{6.9}$$

の下で不変になるよう置き換えたものになっている．

このようなキンク背景では，カイラルなゼロモードの局在化が実現される*．これを確かめるには，キンク背景 (6.5) の下での五次元ディラック方程式

$$0 = \left[i\Gamma^M\partial_M - W\right]\Psi = \left[i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma_5\partial_y - W(y)\right]\Psi(x,y) \tag{6.10}$$

を解けばよい．五次元の場 $\Psi(x,y)$ を変数分離

$$\Psi(x,y) = \sum_n \psi_{\mathrm{R}}^{(n)}(x)\,\chi_n^{(+)}(y) + \sum_n \psi_{\mathrm{L}}^{(n)}(x)\,\chi_n^{(-)}(y) \tag{6.11}$$

* この現象は，物性物理でも，異なる媒質の境界面での「表面モード」として知られている．またゼロモード解 (6.17) は，超対称量子力学[37] のゼロエネルギー束縛状態と同じである．

して，y 方向の波動関数 $\chi_n^{(\pm)}(y)$ を決定しよう．$Q_\pm \equiv \mp\partial_y - W(y) = (Q_\mp)^\dagger$ と定義して，表式 (6.11) をディラック方程式 (6.10) に代入すると

$$\left\{\begin{array}{l} Q_+\chi_n^{(+)}(y) = m_n\chi_n^{(-)}(y) \\ Q_-\chi_n^{(-)}(y) = m_n\chi_n^{(+)}(y) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{R}}^{(n)}(x) = m_n\psi_{\mathrm{L}}^{(n)}(x) \\ i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\mathrm{L}}^{(n)}(x) = m_n\psi_{\mathrm{R}}^{(n)}(x) \end{array}\right. \quad (6.12)$$

と変数分離される．このとき，四次元のディラック方程式 (4.5) と見比べると，定数 m_n^2 は四次元の場 $\psi_{\mathrm{R/L}}^{(n)}(x)$ の質量である．また，固有モード関数 $\chi_n^{(\pm)}(y)$ を二成分表示で表すと

$$\sigma_3\begin{pmatrix} \chi_n^{(+)} \\ \chi_n^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\chi_n^{(+)} \\ -\chi_n^{(-)} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \gamma_5\psi_{\mathrm{R}}^{(n)}(x) = +\psi_{\mathrm{R}}^{(n)}(x) \\ \gamma_5\psi_{\mathrm{L}}^{(n)}(x) = -\psi_{\mathrm{L}}^{(n)}(x) \end{array}\right. \quad (6.13)$$

のように，σ_3 の固有値 $\epsilon = \pm 1$ が四次元のカイラリティ (γ_5 の固有値) に対応するので，固有モード関数 $\chi_n^{(\pm)}(y)$ の満たす方程式は

$$\widehat{Q}\begin{pmatrix} \chi_n^{(+)} \\ \chi_n^{(-)} \end{pmatrix} = m_n\begin{pmatrix} \chi_n^{(+)} \\ \chi_n^{(-)} \end{pmatrix}, \quad \widehat{Q} \equiv \begin{pmatrix} 0 & Q_- \\ Q_+ & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2\partial_y - \sigma_1 W \quad (6.14)$$

の形にも書ける．この $\widehat{Q}$ は $\chi_n^{(\pm)}$ について非対角的だが，$\widehat{Q}^2$ を計算すると

$$\widehat{Q}^2 = \begin{pmatrix} Q_-Q_+ & 0 \\ 0 & Q_+Q_- \end{pmatrix} = -\partial_y^2 + W^2 - \sigma_3\,\partial_y W \quad (6.15)$$

と対角的になる．結局，カイラリティ $\epsilon = \pm 1$ に対応した固有モード関数 $\chi_n^{(\pm)}(y)$ はそれぞれ，$W^2(y) \mp \partial_y W(y)$ をポテンシャルとするシュレーディンガー方程式

$$\begin{aligned} H^{(\pm)}\chi_n^{(\pm)}(y) &= m_n^2\,\chi_n^{(\pm)}(y) \\ H^{(\pm)} \equiv Q_\pm^\dagger Q_\pm &= -\partial_y^2 + W^2 \mp \partial_y W \end{aligned} \quad (6.16)$$

に従うことがわかった．また，このハミルトニアン $H^{(\pm)}$ のエネルギー固有値 m_n^2 は四次元でのフェルミ粒子の二乗質量に対応している．

面白いことに，ポテンシャル (6.16) の最後の項は，カイラリティに応じて符号が違う．実際，キンク配位では $\partial_y W > 0$ なので，右手型モード ($\epsilon = +1$) に対して引力的，左手型モード ($\epsilon = -1$) では斥力的である．これら左右手型モードに対するポテンシャルの形を，それぞれ図 6.4 と 6.5 の実線で示した．

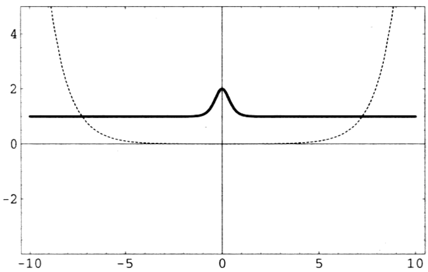


図 6.4　左手型のゼロモード関数 $\chi_0^{(-)}(y)$ は $y \to \pm\infty$ で発散し，規格化できない．

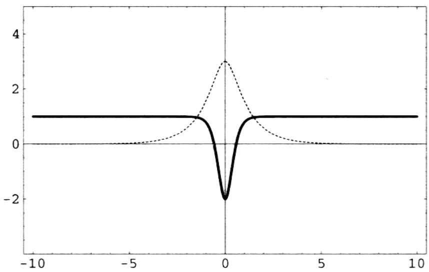


図 6.5　右手型のゼロモード関数 $\chi_0^{(+)}(y)$ は $y = 0$ に局在している．

この結果，キンク配位と結合するフェルミ場は，カイラリティに応じて異なる局在化の様子を示すことになる．特にゼロ質量 $m_0 = 0$ のモードは，一階の微分方程式 $(\epsilon\,\partial_y + W)\,\chi_0^{(\epsilon)}(y) = 0$ を解くことにより

$$\chi_0^{(\pm)}(y) = \chi_0^{(\pm)}(0) \exp\left[\mp\int_0^y \mathrm{d}z\, W(z)\right] \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \chi_0^{(\pm)}(0)\,\mathrm{e}^{\mp v|y|} \qquad (6.17)$$

と求められる．図 6.4 と 6.5 の点線で示したように，キンク背景($v > 0$ の場合)において，**$\epsilon = +1$ の右手型ゼロモードはキンクの付近に局在する**のに対して，**$\epsilon = -1$ の左手型ゼロモードは規格化可能な解をもたない．** こうして，(a) 座標 $(x^\mu,\ y = 0)$ で指定される四次元的な境界面の付近に局在した，しかも望み通り，(b) カイラルな四次元理論が得られたのである．

なお，このようなゼロモードの局在化は，キンクの詳細な形状にはよらず，$W(y)$ の $y \to \pm\infty$ での漸近的な振る舞いのみで決まっている．ここでは立ち入らないが，一般に理論のカイラル構造は，位相幾何学的な性質と密接に関連することが知られている．$D = 4 + d$ 次元での渦糸($d = 2$)，磁気単極子($d = 3$)，インスタントン($d = 4$)などの，ゲージ場の非自明な配位(パリティの破れを伴うような高次元ソリトン)との結合を通じて，カイラルなフェルミ場のゼロモードが現れ，しかもその個数は**ディラック演算子の指数(index)** と呼ばれる位相不変量で与えられるのである．

6.3　オビフォルド空間上でのフェルミ場の局在化

以上のように，フェルミ粒子，しかもカイラルなゼロモードを局在させる機

構があることがわかった．しかし，これをコンパクトな余次元空間で実現するにはもう少し工夫が必要である．

第 3 章の考察に従えば，五次元目の方向はコンパクト化しなければならない．単純な $\boldsymbol{S}^1$ コンパクト化の場合，場の周期性 $\Phi(x, y+2\pi R) = \Phi(x, y)$ のためにキンクは単独で存在できず，必ず反キンクも存在することになる．反キンク配位はキンク配位 (6.5) で $v < 0$ としたものに相当するので，キンクの場合と反対のカイラリティをもつモードの局在化が起こり，折角つくったカイラル非対称性がコンパクト化した途端に失われてしまう*．

$\boldsymbol{S}^1$ コンパクト化に伴うこの種の問題は，次のように静電気学の問題と対比させると理解しやすい．図 6.6 左図のように，$\boldsymbol{S}^1$ 上に正電荷が単独にあると，左右均等に拡がる電気力線が円の反対側でぶつかってしまう．それを避けるには，電気力線が吸い込まれるように，ちょうど反対の負電荷を別の場所に置かないといけない．今の場合，正電荷がキンク，負電荷が反キンクに対応する．

$\boldsymbol{S}^1$ コンパクト化された空間では，キンク・反キンクが共存してしまうためにカイラル非対称性が壊れてしまうが，この問題は，§ 4.3 で紹介したオビフォルド化の方法で解決することができる．つまり，$\boldsymbol{S}^1$ 上でキンク・反キンク配位を作っておいて，それを $\boldsymbol{Z}_2$ でオビフォルド化するのである．これはまた，$\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ コンパクト化した五次元理論でキンク・反キンク配位を考えるといってもよい．

ここではキンク・反キンク配位を四階反対称テンソル場を用いて構成しよう**．



図 6.6　$\boldsymbol{S}^1$ 上の静電気学．電気力線の逃げ場がないので，正電荷 $+Q$ は単独で存在できない．別の点に負電荷 $-Q$ を置いてはじめて，矛盾のない電荷分布が可能になる．

---

* ひとつの配位にキンクと反キンクの共存が起こるのは五次元の特殊事情であり，六次元以上ではコンパクトな内部空間の位相的性質に応じてカイラル構造が残り得る．しかし，パリティ不変性のため，指数が正と負の配位が同等に可能なので，両者の量子論的な混合が小さい必要がある．オビフォルド化した理論は，一方の配位のみを取り出した「有効理論」とみなせるだろう．

** 以下の状況はホジャバ–ウィッテンの混成型 M 理論とよく似ている．なお，場 $W(x, y)$ は超対称理論の文脈では「超対称性の一重項」と呼ばれるものに相当する[38)]．

まず五次元フェルミ場の質量を場 $W(x,y)$ で置き換えておき，これを運動方程式で定数に戻す未定乗数の場として，四階反対称テンソル場 $A_{MNRS}(x,y)$ を導入しておく．つまり，五階完全反対称な定数テンソル ε^{LMNRS}（ただし $\varepsilon^{01235}=1$）を用いて，五次元の作用積分

$$S_{\text{Bulk}} = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}y \, \varepsilon^{LMNRS} \partial_L W(x,y) \, A_{MNRS}(x,y) \tag{6.18}$$

を考える．この作用を A_{MNRS} で変分して得られる運動方程式は，例えば $L=(\lambda,5)$ のように，対応するギリシャ文字を用いて，五次元ベクトル x^L の添字を四次元方向 x^λ と五番目の方向 $y \equiv x^5$ に分解すると

$$A_{\mu\nu\rho 5} \text{ による変分：} \quad 0 = \partial_\lambda W(x,y) \tag{6.19}$$

$$A_{\mu\nu\rho\sigma} \text{ による変分：} \quad 0 = \partial_y W(x,y) \tag{6.20}$$

となる．これは $W(x,y)$ が四次元座標で微分 $\partial_\lambda \equiv \partial/\partial x^\lambda$ しても，余次元座標で微分 $\partial_y \equiv \partial/\partial y$ で微分しても消える，つまり定数であることを示している．

さらに A_{MNRS} の源として $y_0=0$ での湧き出し $v_0=+v$ と $y_1=\pi R$ での吸い込み $v_1=-v$ を表すブレイン項

$$S_{\text{Brane}} = -\sum_{i=0,1} 2v_i \int \mathrm{d}^4x \, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\mu\nu\rho\sigma}(x,y_i), \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma 5} \tag{6.21}$$

を加えよう．すると四次元方向 (6.19) はそのままであるが，余次元方向 (6.20) は運動方程式が変更されて

$$\partial_y W(x,y) = \sum_{i=0,1} 2v_i \, \delta(y-y_i) = 2v \Big[\delta(y) - \delta(y-\pi R) \Big] \tag{6.22}$$

となる．作用 (6.18)–(6.21) はすべて，$\eta_2(A_{MNRS})=+1$，$\eta_2(W)=-1$ とする $\boldsymbol{Z}_2$ 不変性を満たすので，$\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ オビフォルド化を考えることができる．

以上の設定は難しそうにみえるが，実は「無限に拡がった 2 枚の平行金属板に正負電荷 $\pm v$ を与えたときの電場 $W(x,y)$ を決定する」電磁気学の問題と全く同じである．したがって，方程式 (6.22) を解いて $W(x,y)=W(y)$ を決定するには，ガウスの法則を用いて，デルタ関数的な特異性を境界条件に読み換えればよい．$y=y_i$ を囲む無限小領域で積分すると $W(y_i+\varepsilon)-W(y_i-\varepsilon)=2M_i$

となるが，一方 $W(y)$ が奇関数 $W(y_i+\varepsilon)+W(y_i-\varepsilon)=0$ であることより

$$\begin{cases} W(y_0 \pm 0) \ = \ \pm v_0 \ = \ \pm v \\ W(y_1 \mp 0) \ = \ \mp v_1 \ = \ \pm v \end{cases} \tag{6.23}$$

この境界条件の下，基本領域 $0 \leq y \leq \pi R$ の内部で微分方程式 (6.22) を解けば，望みのキンク・反キンク配位

$$W(y) = v\,\epsilon(y) \qquad \text{for} \qquad |y| < \pi R \tag{6.24}$$

が得られたことになる*.

いよいよ，オビフォルドにコンパクト化された余次元空間内で，カイラルなフェルミ場が局在することを示そう．キンク・反キンク配位 (6.24) と結合するフェルミ場 $\Psi(x,y)$ の KK モード展開 (6.11) は § 6.1 と同様に実行することができる．一方，§ 4.3 で述べたように，$\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ オビフォルド上のフェルミ場は $\boldsymbol{Z}_2$ 変換 (4.14) に対して不変な状態のみが許されるので，右手型モードは $\boldsymbol{S}^1$ 上で偶関数，左手型モードは奇関数に制限される ($\eta_2(\Psi) = +1$ の場合)．その結果，規格化された固有モード関数は，方程式 (6.14) を解くことにより

$$\chi_0^{(+)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\,\mathrm{e}^{-v|y|}, \qquad \begin{cases} \chi_{n\neq 0}^{(+)}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi R}}\,\mathrm{e}^{-v|y|}\cos\dfrac{ny}{R} \\ \chi_{n\neq 0}^{(-)}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi R}}\,\mathrm{e}^{-v|y|}\sin\dfrac{ny}{R} \end{cases} \tag{6.25}$$

と求められる．

図 6.8 に右手型モードの波動関数 $\chi_n^{(+)}(y)$，図 6.7 に左手型モードの波動関数 $\chi_n^{(-)}(y)$ の概形を示す．ただし，$\boldsymbol{Z}_2$ 変換に対する偶奇性がわかるように，横軸は $\boldsymbol{S}^1$ の座標 $-\pi R < y \leq \pi R$ にしてある．左右それぞれで，太い実線がゼロモード，破線が第一 KK モード，点線が第二 KK モードである．確かに Ψ_{L} のゼロモードが取り除かれ，Ψ_{R} のゼロモードが局在しているのが読み取れるだろう．(図では見やすさのために，横軸を引き延ばしてある.)

* $\boldsymbol{S}^1$ の座標として $-\pi R < y \leq \pi R$ を用いているため，$y=0$ のキンクが明白になっているが，その反面，$y=\pi R$ に反キンクがあることがわかりにくい．この点は $\boldsymbol{S}^1$ の被覆空間 ($-\infty < y < \infty$) 上でフーリエ展開を用いれば改善できる．つまり

$$\epsilon(y) \ = \ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{ny}{R}\,, \quad \delta(y) \ = \ \frac{1}{2\pi R}+\frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{ny}{R}\,.$$

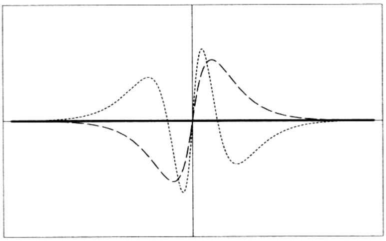


図 6.7　左手型のモード関数 $\chi_n^{(-)}(y)$.

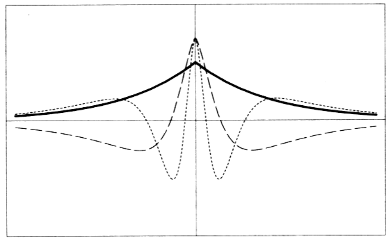


図 6.8　右手型のモード関数 $\chi_n^{(+)}(y)$.

このようにして，キンク配位による局在化のアイデア(§ 6.1)とオビフォルドコンパクト化のアイデア(§ 4.3)を併せることにより，カイラル構造をもたない五次元フェルミ場 $\Psi(x, y)$ から出発して，ブレインに局在した，カイラルな四次元フェルミ場の理論を構成することができる．KK モード展開 (6.11) において，固有モード関数が式 (6.25) で与えられる場合，四次元理論は右手型のゼロ質量フェルミ場 $\psi_{\mathrm{R}}^{(0)}(x)$ の有効理論になる．一方，KK モードはそれぞれの $n \neq 0$ に対し，$\psi_{\mathrm{R}}^{(n\neq 0)}(x)$ と $\psi_{\mathrm{L}}^{(n\neq 0)}(x)$ の 2 つがペアになって，質量 $m_n = n/R$ をもっている(§ 4.1 参照)．

この章を終わる前に，オビフォルドに関する技術的な補足をひとつしておこう．$\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ オビフォルド上の場を考えるには 2 つの同等な見方があり，以上の議論ではそれらを場合に応じて使い分けてきた．$\boldsymbol{S}^1$ 上で $\boldsymbol{Z}_2$ 不変な配位に制限する見方と端のある空間 $\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ 上で直接考える見方である．前者の見方は，空間の端を考える必要がない点が便利であり，後者の見方では，固定点にデルタ関数的な特異性がある場合，それが境界条件に翻訳されるので，方程式を解く際には都合がよい[30,32]．同様の注意は，次章の考察にも当てはまる．

7章 重力場の局在化——隠された次元

ブレイン世界の考え方では，ゲージ場や物質場は高次元の中に埋め込まれたブレインに閉じ込められていると考える．実際に，場の理論的な方法でブレインを構成し，バルクの物質場をブレイン上に局在させられることは第 6 章で述べた通りである．それならば，この路線を追求して，すべての場をブレイン上に局在させてしまうことはできないだろうか．もしそのようなことが可能なら，**コンパクト化という仮定を取り払って**，最初から非コンパクトな高次元時空を考えることができるだろう．果たして，そんなことが可能だろうか？

第 5 章の式 (5.1)–(5.2) で述べたように，超弦理論における D ブレインでは，ゲージ場や物質場(開弦)はブレイン上に束縛されるのに対し，重力場(閉弦)はバルクの全時空を伝播する．例えば § 5.3 で紹介したシナリオのように，このような場の「住み分け」がブレイン世界の発想の重要な点であった．

このように，ブレイン世界では，重力という場はいろいろな場の中で特殊な位置を占めている．したがって，§ 2.2 で述べたことを思い起こすと，たとえ物質場やゲージ場の局在化が実現したとしても，**非コンパクトな余次元は重力の法則 (5.4) に反映するはず**である．式 (5.6) からわかるように，余次元の半径 R が無限大の極限では，四次元重力の結合定数がゼロ

$$G_{\mathrm{N}} \sim \frac{G_{(4+d)}}{R^d} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{7.1}$$

になってしまう*．つまり，重力以外の物質場やゲージ場の局在化が実現しても，それだけでは「隠された次元」というわけにはいかない．こうして非コン

* これは「重力がなくなる(decouple する)」ことを意味するのではない．重力ポテンシャルの $1/r$ 項の係数として定義される G_{N} がゼロになるということは，式 (3.16) に見られるように，“次の項” $1/r^2$ が効いてくることを意味する．薄い導体板中に束縛された電子といえども，空間三次元的なクーロン・ポテンシャルを感じるのと同じ事情である．

パクトな余次元は，つい最近まで不可能だと考えられてきたのである*.

しかし，1998 年にランドール(L. Randall)とサンドラム(R. Sundrum)は「非因子型」と呼ばれるタイプの計量をもつ五次元模型を考察し，物質場のみならず，**重力場さえもが局在し得る**こと[40]，そうすれば，重力定数を有限に保ちつつ，**半径を無限大にして非コンパクトな余次元を実現できる**こと[41]を指摘した．この章では，ランドール–サンドラム(RS)模型の概略を紹介しよう．

§1.2 でも触れたように，われわれの四次元宇宙は限りなく平坦である．ところが，高次元中に埋め込まれたブレインを考えると，ブレインのもつエネルギー密度(ブレイン張力)により，周りの時空が曲げられてしまうことになる．この困難を避けるには，逆説的ではあるが，宇宙項をもった「曲がった高次元時空」から出発するのがよい．実際，ルバコフ(V.A. Rubakov)とシャポシュニコフ(M.E. Shaposhnikov)は先駆的な論文 42) で，宇宙項がある高次元時空の場合でも，すぐ後で述べるような「非因子型計量」を考えれば，四次元時空が平坦にできることを示した．RS 模型では，このアイデアを用いて，高次元の宇宙項による効果とブレイン張力による効果を相殺させることを考えるのである．

これから考える五次元時空は，その計量が

$$\mathrm{d}s^2 = G_{\mu\nu}(x,y)\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}y^2 \tag{7.2}$$

のような形をとるものである．重要なことは，(ブレインに沿った)四次元方向の計量 $G_{\mu\nu}$ が四次元座標 x^μ だけでなく，余次元座標 y にも依存していることである．このような計量は**「非因子型」の計量(non-factorizable metric)**と呼ばれ，RS の五次元模型のほか，ホジャバ–ウィッテンの 11 次元模型[30] などでも重要な役割を果たすものである**.

7.1　ランドール–サンドラム模型——あらすじ

この節では，RS 模型における五次元背景時空および重力場の局在化について，イメージが捕めるように，大まかな内容を紹介しよう．詳細な式の導出は，

---

* 誘導重力に基づいた全く別の考え方については，例えば文献 39) をみよ．

** 膨張宇宙を記述するのに用いられるロバートソン–ウォーカー(Robertson–Walker)計量は，空間計量が時間に依存するという意味で，やはり非因子型計量の例である．ここで考える計量は四次元計量が余次元座標に依存している．また，六次元の非因子型の時空が文献 43,44) などで考察されている．

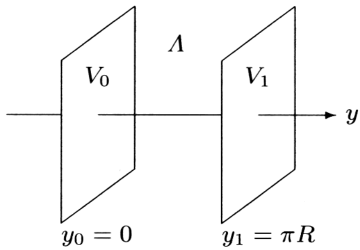


図 7.1　RS 模型の状況設定．ブレインのエネルギー密度 V_i をバルクの宇宙項 Λ で相殺させる．

一般相対論や特殊関数論の知識が必要になるので，§ 7.2 以降で述べる．

ブレイン世界を考える際には，§ 5.3 と同様に，四次元での重力定数 G_{N}（あるいはプランク質量 m_{pl}）が高次元理論の量を用いてどのように表されるかが重要になる．五次元の重力定数 $\kappa_5^2 \equiv 8\pi G_{(4+1)}$ は次元 L^{-3} をもつので，理論の基礎スケールとして，五次元プランク質量 M_5 を $\kappa_5^2 = 1/M_5^3$ と定義しておこう．

$x^M = (x^\mu, x^5)$ を座標とする五次元時空を考え，ひとまず，五次元目の方向を $\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ オビフォルドにコンパクト化しておく．つまり，五次元目の座標は

$$y \sim y + 2\pi R \sim -y \qquad \left(y \equiv x^5\right) \tag{7.3}$$

という同一視を満たすものとする．§ 4.3 でも述べたように，$y_0 = 0$ と $y_1 = \pi R$ はオビフォルドの固定点（五次元時空の中では四次元的に拡がった固定面）になっている．後で $R \to \infty$ の極限がとれるか否かが問題になる．

図 7.1 に RS 模型の状況設定を示した．x^μ 方向に拡がった二組の D ブレインがそれぞれ，固定面 $y_0 = 0$ と $y_1 = \pi R$ の直上に置かれている．重力場のみが五次元全体を伝播し，それ以外の場は D ブレイン上に束縛されているとする．

固定面 $y = y_i$ に置かれたブレインがもつエネルギー密度（ブレインの張力）をそれぞれ V_i $(i = 0, 1)$ とすると，このブレイン張力のために時空は曲がってしまう．そこで，ブレインの四次元世界面が平坦になるよう，バルクのエネルギー密度（宇宙項）Λ を導入しよう．すると，詳しくは § 7.2 で示すが

$$\frac{V_0}{6M_5^3} = k = -\frac{V_1}{6M_5^3}\,, \qquad k \;\equiv\; \pm\sqrt{\frac{-\Lambda}{6M_5^3}} \tag{7.4}$$

の関係が成り立つとき，静的かつ平坦なブレインの配位が実現される．つまり，

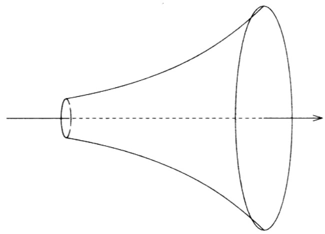


図 7.2　RS 模型の歪曲した五次元時空．x^μ 方向の計量 $G_{\mu\nu}$ が y 方向に変化する非因子型のコンパクト化になっている．

五次元での重力場の方程式を解くことにより，非因子型の計量

$$ds^2 = e^{-2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \tag{7.5}$$

$$A(y) = A_0 + k\,|y| \qquad \text{for} \qquad -\pi R \leq y \leq \pi R \tag{7.6}$$

が得られるのである．これは確かに，ブレイン間の距離が x^μ に依存しない定数 R で，かつブレインに沿う方向の四次元時空はミンコフスキー的な計量 $G_{\mu\nu} \propto \eta_{\mu\nu}$ をもつ解になっている．また式 (7.4) で定義される k は，長さの逆数の次元 L^{-1} をもち，五次元時空の曲率スケールを特徴づけるものである．理論のパラメータ (V_i と Λ) の大きさはすべて五次元プランク質量 M_5 で決まると考えると，曲率スケール k も M_5 と同程度の大きさと考えられる．

RS の五次元時空 (7.5) の大きな特徴は，**歪曲因子（ワープ因子，warp factor）**と呼ばれる指数因子 $e^{-A(y)} \propto e^{-k|y|}$ の存在である．この因子のため，ブレインに沿った四次元方向の計量が y 方向に指数関数的に変化するものになっている．この様子を図 7.2 に示した．仮に y 方向に'歩いていける'とすると，x^μ 方向の四次元時空が膨張していくのがわかるだろう．このような時空のコンパクト化は，**歪んだコンパクト化（warped compactification）**と呼ばれている．

さて，このような RS 時空を背景時空として，どのような物理が展開されるのだろう．この背景時空の重要な点は，重力場の伝播の様子が平坦時空と大きく異なる点である．詳細は § 7.3–7.4 で示すことにして，結論を予告しておこう．条件 (7.4) より，$y=0$ と $y=\pi R$ に置かれた二組のブレインのうち，(k の符号に応じて) 一方は張力が正，他方は負になるので，前者を **⊕-ブレイン**，後

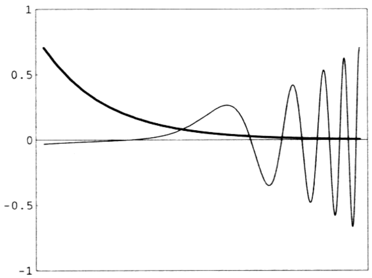


図 7.3　太線はゼロモードの波動関数 $\hat{\varphi}_0(y)$，細線は KK モードの波動関数 $\hat{\varphi}_{n=9}(y)$ である．横軸は五次元座標 $0 \le y \le \pi R$ で，$k > 0$ の場合．ゼロモードが原点の ⊕ ブレインに集中するのに対し，KK モードは反対側の ⊖ ブレインの周りで(激しく振動しながら)局在している．

者を ⊖**-ブレイン**と呼ぶことにする．このとき

(a)　重力場のゼロモードは正の張力をもつ ⊕-ブレインに局在する
(b)　重力場の KK モードは負の張力をもつ ⊖-ブレインに局在する　(7.7)

という性質が成り立つ．図 7.3 に例示したように，重力場のゼロモードを表す波動関数 $\hat{\varphi}_0(y)$ は ⊕-ブレインに集中するのに対し，重力場の KK モードを表す波動関数 $\hat{\varphi}_{n\neq 0}(y)$ は反対側の ⊖-ブレインを中心に激しく振動するのである．

このような重力場の面白い振る舞いに基づいて，ランドールとサンドラムは全く異なった 2 つのシナリオを提唱した．つまり，「われわれのブレイン」(つまり標準模型の場が束縛されているブレイン)が ⊕ か ⊖ かに応じて

- われわれのブレインが ⊕-ブレインの場合，万有引力の法則 (5.4) に矛盾することなく，コンパクト化の半径 R を無限大にすることができる[41]，
- われわれのブレインが ⊖-ブレインの場合，$kR = \mathcal{O}(10)$ であれば，プランク階層性問題 (5.3) が解決される[40, 45, 46]，

というのである．これらには適当な名前がないが，両者を区別する必要があるときには，前者を RS_+ 模型，後者を RS_- 模型と呼ぶことにしよう．

以下では RS_+ 模型に主に注目するが，その前に RS_- 模型について，最小限のことを述べておこう．階層性問題に対する余次元からのアプローチについては，§ 5.3 で「大きな余次元シナリオ」を紹介した．その要点は，体積の大きな余次元空間を考えると，重力場のゼロモードが薄まるので，ブレインに束縛さ

れた物質は重力を弱く感ずることであった．それに対して，RS_- 模型は別の解決案になっている．図 7.3 のように，重力場のゼロモードは $\oplus$-ブレインに局在しているので，もし標準模型の場が反対側の $\ominus$-ブレインに束縛されているとすると，物質は重力を弱く感ずることになる．こうして，§ 5.3 のシナリオとは異なり，高次元の基礎スケールから掛け離れた大きさの半径を仮定することなく，四次元重力の弱さ(プランク質量の巨大さ)が説明できるのである*．

さて，RS_+ 模型に戻ろう．この模型の驚くべき点は，余次元がコンパクト化しているという仮定をしていないにもかかわらず，余次元の存在が四次元世界から実にうまく「隠されて」しまうことである．実際，この理論で $\oplus$-ブレイン上の観測者が観測する重力定数や重力ポテンシャルを計算すると**

$$\frac{1}{8\pi^2 G_{\mathrm{N}}} \equiv m_{\mathrm{pl}}^2 = \frac{M_5^3}{|k|}\left[1-\mathrm{e}^{-2\pi|k|R}\right] \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{M_5^3}{|k|} < \infty \tag{7.9}$$

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = G_{\mathrm{N}}\,\frac{m_1 m_2}{r}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2 r^2}\right)\right] \tag{7.10}$$

となり，半径 R を無限大にする極限でも，万有引力の法則 (5.4) が大きく変更されることなしに再現される．つまり，(a) 重力場のゼロモードが $\oplus$ ブレインに局在するおかげで，重力定数 G_{N} がゼロ (m_{pl} が無限大) にはならず(§ 7.3)，しかも，(b) 重力場の KK モードが $\oplus$ ブレイン上の場と強く結合しないので，その効果は式 (7.10) の第二項のように小さくなるのである(§ 7.4)．

このようなことが可能になるのは，先に予告した性質 (7.7) のおかげである．では，どうしてゼロモードと KK モードで局在化の様子が異なるのだろうか？折角ここまできたのだから，少々複雑になるが，§ 7.3–7.4 で立ち入って考察しておきたい．しかしその前にまず，エッセンスを直観的につかんでおこう．

重力場のゼロモードや KK モードを決める方程式は，§ 6.2 のフェルミ場と同様に，量子力学のシュレーディンガー方程式の形に書き換えることができ

---

* 余次元半径を安定化させる機構は，文献 46) などで提案されている．なお文献 47) などで指摘されたように，RS_- 模型でのプランク質量は，式 (7.9) ではなく

$$m_{\mathrm{pl}}^2 = \frac{M_5^3}{|k|}\left[\mathrm{e}^{2\pi|k|R}-1\right] \approx \frac{M_5^3}{|k|}\,\mathrm{e}^{2\pi|k|R} \gg \frac{M_5^3}{|k|} \tag{7.8}$$

となるので，この模型の五次元スケールは $M_5 \gtrsim |k| = \mathcal{O}(1)$ TeV と考えるのが自然である．

** 相対論的な考察については，例えば文献 48) を参照されたい．

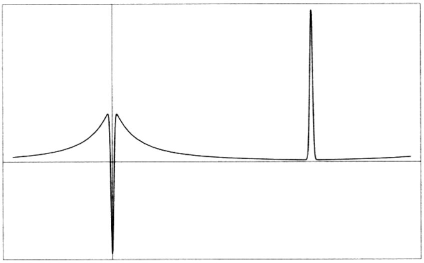


図 7.4　重力場に対する“火山状”ポテンシャル $V_{\rm eff}(z)$ の概形．横軸は z 座標 (7.11) である．$\oplus$ ブレインの位置 $z=z_0$ (図での縦軸の位置)にデルタ関数的な深い引力ポテンシャルがあり，$\ominus$ ブレインの位置 $z=z_1$ に鋭いピークがある．図ではデルタ関数をガウス型で代用してある．

る[41,49]．詳しい式の導出は省略するが*，五次元目の座標 y を

$$\Omega^{-1}(z) \equiv \mathrm{e}^{k|y|} = 1 + k\,|z| \qquad (\ \mathrm{sgn}(z) = \mathrm{sgn}(y)\ ) \tag{7.11}$$

で定義される z に取り替えると，対応するハミルトニアンは

$$H = Q^\dagger Q\ , \qquad Q \equiv \partial_z + W(z) = \partial_z + \frac{3}{2}\,\partial_z \ln \Omega^{-1}(z) \tag{7.12}$$

となることがわかる．したがって，ポテンシャル $V_{\rm eff}(z) = W^2(z) - \partial_z W(z)$ は

$$V_{\rm eff}(z) = \frac{15}{4}\,\frac{k^2}{(k\,|z|+1)^2} - 3k\Big[\,\delta(z-z_0) - \delta(z-z_1)\Big] \tag{7.13}$$

である．図 7.4 に示したように，このポテンシャルは“火山状”の形をしている．

RS 時空における重力場の振る舞い (7.7) は，図 7.4 から読み取ることができる．(a) **原点でのデルタ関数的な引力ポテンシャル**のおかげで，量子力学で知られている通り，ひとつだけ束縛状態が現れる．一方，(b) **原点以外でのなだらかな斥力ポテンシャル**のために，励起状態は原点から遠方に押しやられることになる．

面白いことに，余次元内の重力場のゆらぎに対するハミルトニアン (7.12) は

*非因子型の背景時空 (7.2) を伝播する重力場の微小ゆらぎに対する一般共変な波動方程式 $(1/\sqrt{-G})\,\partial_M\big[\sqrt{-G}\,G^{MN}\partial_N h_{\mu\nu}\big] = 0$ を書き換えればよい．z 座標は，全体に掛かる因子 $\Omega^2(z)$ を除き五次元計量が平坦になるので，共形平坦(conformally flat)な座標系と呼ばれる．なお $\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{k|y|}\mathrm{d}y$ なので，$\mathrm{d}z$ について規格化した波動関数は，規格化条件 (7.28) を満たす $\widehat{\varphi}_n(y)$ と $\mathrm{e}^{k|y|/2}$ だけ局在化のみえ方が異なる．

超対称量子力学のもの (6.16) と同じ形である．その意味では，§ 6.2 で述べたフェルミ場の局在化と本質的に同じ機構により，重力場のゼロモードが局在することになる．ブレインのおかげで，五次元の背景重力場がキンク的な構造をもち，その背景重力場との相互作用で，重力場が局在しているのである*．

7.2　ランドール–サンドラムの五次元時空

§ 7.1 では RS 模型の概略を述べたが，以下でそれを少し詳しく取り扱う．この節ではまず，RS の五次元背景時空の表式 (7.5)–(7.6) を導こう．そのため物質場のゆらぎを無視すると，前節の図 7.1 に示した状況設定は，作用積分

$$S_{\rm RS} = \int \mathrm{d}^4x \int_{-\pi R}^{\pi R} \mathrm{d}y \Biggl[\sqrt{-G} \left(\frac{1}{2\kappa_5^2} R^{(5)} - \Lambda \right) - \sum_{i=0,1} \sqrt{-g}\, V_i\, \delta(y-y_i) \Biggr] \tag{7.14}$$

で表すことができる．ここで $G = \det G_{MN}$ は五次元計量の行列式であり，$\mathrm{d}^4x\mathrm{d}y\sqrt{-G}$ が五次元の不変体積要素になる．同様に $g = \det G_{\mu\nu}$ はブレイン上に誘導される四次元計量の行列式であり，$\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}$ が四次元の不変体積要素になる．したがって，第一項は(古典的な)五次元の重力場の作用と宇宙項であり，第二項は i 番目のブレイン $(i = 0, 1)$ がもつエネルギー密度がデルタ関数的に集中していることを表している．

作用 (7.14) から変分原理によって真空中のアインシュタイン方程式

$$R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R^{(5)} = -\kappa_5^2 \Biggl[G_{MN}\Lambda + \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-G}}\, \delta_M^\mu \delta_N^\nu\, G_{\mu\nu} \sum_{i=0,1} V_i\, \delta(y-y_i) \Biggr] \tag{7.15}$$

が導かれる．計量として非因子型 (7.5) を仮定すると，曲率の成分が $G^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 4\bigl[A'' - 4\bigl(A'\bigr)^2\bigr]$ や $G^{55}R_{55} = 4\bigl[A'' - \bigl(A'\bigr)^2\bigr]$ と計算されるので，この方程式は

$$\bigl(A'\bigr)^2 = -\frac{\kappa_5^2}{6}\Lambda = \frac{-\Lambda}{6M_5^3} \equiv k^2 \tag{7.16}$$

---

* RS 時空でフェルミ場の伝播を考えると，やはり局在化を示す[38, 50)]．

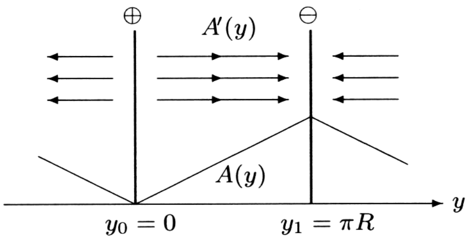


図 7.5　RS_+ 模型の背景時空．図は $k > 0$ かつ $A_0 = 0$ の場合．$k < 0$ かつ $A_0 = \pi R$ の場合はブレインの入れ替え $y_0 \longleftrightarrow y_1$ でこれと等価になるので，以下 $k > 0$ かつ $A_0 = 0$ に限る．

$$A'' = \frac{\kappa_5^2}{3} \sum_i V_i \, \delta(y - y_i) = \frac{2V_0}{6M_5^3} \, \delta(y) + \frac{2V_1}{6M_5^3} \, \delta(y - \pi R) \quad (7.17)$$

に帰着される．これらを解くことにより，共形因子 $A(y)$ が決定される．

これらの方程式に解が存在するためには，いくつかの条件が満たされる必要がある．まず一番目の方程式 (7.16) から，バルクの五次元時空は負の宇宙項をもつ**反ド・ジッター空間** $\mathrm{Ad}S_5$ でないといけない．また，二番目の方程式 (7.17) を $\boldsymbol{S}^1$ 上で積分することにより，ブレインの張力についての拘束条件*

$$0 = \int_{-\pi R}^{\pi R} \mathrm{d}y \, A''(y) \propto V_0 + V_1 \qquad (7.18)$$

が得られる．その結果，一方のブレインの張力は負でないといけない．さらに，§ 6.3 と同様に静電気学の問題と対比させて考えれば，方程式 (7.16)–(7.17) が積分可能であるためには，バルクの宇宙項 Λ とブレインの張力 V_i の間に条件 (7.4) が満たされないといけないこともわかる．図 7.5 において，2 枚のブレインを平行に置かれた金属板とみなすと，その張力が金属板に与えた電荷に，共形因子 $A(y)$ が電位に対応していることがわかるだろう．

こうして，条件 (7.4) が満たされる限り，五次元の古典的なアインシュタイン方程式 (7.15) の解として，四次元方向にポアンカレ不変で，余次元方向に歪曲した計量 (7.5) が得られる．$-\infty < y < \infty$ でも正確な共形因子 (7.6) の表式は

---

* この条件が満たされない場合，ブレイン上の四次元宇宙は指数関数的に膨張する[51)]．

$$A(y) = A_0 + \frac{\pi kR}{2}\left[1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{ny}{R}\right)\right] \qquad (7.19)$$

である．以下で RS_+ 模型を考える際には，原点 $y=0$ に $\oplus$-ブレインを置く（したがって $k>0$）ことにし，さらに，その上での誘導計量が $G_{\mu\nu}(x, y=0) = \eta_{\mu\nu}$ になるよう，$A_0 = 0$ となるものとする．

なお，負の張力をもつブレインについて，誤解のないよう補足しておきたい．結論からいうと，**張力が負のブレインはオビフォルドの固定面上に「くぎづけ」されている**必要がある．そうでないと，そのゆらぎとして「負の運動エネルギー」をもつモードが現れてしまうからである．そもそも，オビフォルド空間上で固定面以外の点 $y \neq 0, \pi R$ にブレインを置くためには，同一視 (7.3) のために，その鏡映 $-y$（あるいは $2\pi R - y$）と併せて 2 枚のブレインが必要である．しかし固定面上は例外で，同一視と矛盾することなく，単独のブレインが存在できる．そうすると，このブレインはもはや固定面から離れることができず，その張力が負でも問題が起こらないのである．また § 6.1 で述べたような場の理論的な方法では，張力が正のブレインしか構成することができないが，非摂動的な超弦理論には，（オリエンティフォルド面と呼ばれる）負の張力をもった ‘ブレイン’ が存在することも知られている[26, 33)]．

最後に，RS 模型の状況設定——五次元の宇宙項の起源も含めて——を超弦理論から実現しようとする試みも，例えば文献 52) などで活発に議論されている．

7.3　重力場の局在化——ゼロモード

この節では，RS 背景時空において重力場がどのように伝播するかを調べよう．もともとの計量テンソル場 $G_{MN}(x,y)$ を背景計量 (7.5)–(7.6) の周りで

$$G_{\mu\nu}(x,y) = \mathrm{e}^{-2A(y)} g_{\mu\nu}(x,y), \quad g_{\mu\nu}(x,y) = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa_5\, h_{\mu\nu}(x,y) \quad (7.20)$$

と展開する*．この $h_{\mu\nu}(x,y)$ が重力場の微小ゆらぎを表すものであり，オビフォ

* ブレインに垂直な方向の成分 $G_{55}(x,y)$ のゆらぎを無視するが，ブレイン配位の安定性などを考察する際にはこのモードが重要になる．またオビフォルド化の条件 $G_{5\mu}(x,-y) = -G_{5\mu}(x,y)$ より，$G_{5\mu}$ のゼロモード（KK のゲージ場）は取り除かれている．なおこれらの KK モードは，$G_{\mu\nu}$ の KK モードに吸収される．

ルド化の条件より，$\boldsymbol{Z}_2$ 変換で偶な場である．詳しい計算の結果，物理的な重力波 $h_{\mu\nu}(x,y)$ に対する波動方程式はゼロ質量の五次元スカラー場と同じになる*．したがって，重力場の代わりにゼロ質量スカラー場を調べればよい．

RS 背景上でゼロ質量スカラー場 $\Phi(x,y)$ は，$\boldsymbol{S}^1$ 上の作用

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{scalar}} &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \int_{-\pi R}^{\pi R} \mathrm{d}y\,\sqrt{-G}\,G^{MN}\partial_M\Phi\partial_N\Phi \\
&= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \int_{-\pi R}^{\pi R} \mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-4A}\left[\mathrm{e}^{+2A}\left(\partial_\mu\Phi\right)^2 + \left(\partial_y\Phi\right)^2\right] \qquad (7.21)
\end{aligned}
$$

で記述される．重力場のゆらぎと同じく，$\boldsymbol{Z}_2$ 変換で偶な場を考える．

$\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ 上で直接考える際には，$\boldsymbol{S}^1$ の座標 $-\pi R < y \le \pi R$ を $0 \le y \le \pi R$ に制限する．このとき，微分 $\partial_y\Phi(x,y)$ は y について奇関数だから，$\boldsymbol{S}^1$ 上の場 $\Phi(x,y)$ に対するオビフォルド化の条件は，$\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ 上ではその両端での境界条件

$$
\partial_y\Phi(x,y) = 0\,, \qquad \mathrm{at} \quad y = 0,\ \pi R \qquad (7.22)
$$

に置き換わる．これは自由端（ノイマン型）の境界条件にほかならない．

五次元スカラー場 $\Phi(x,y)$ を KK モード

$$
\Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(x)\,\varphi_n(y) \qquad (7.23)
$$

に展開しよう．第 3 章で述べた平坦時空の場合は，簡単な三角関数系 (3.5) を用いたフーリエ展開 (3.3) であった．今の場合は，歪曲因子 $\mathrm{e}^{-2A(y)}$ があるので，事情が複雑になる．作用 (7.21) を $\boldsymbol{S}^1$ 上で部分積分すると

$$
S_{\mathrm{scalar}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \int_{-\pi R}^{\pi R} \mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-2A}\,\Phi\left[\left(\partial_\mu\right)^2 - M^2\right]\Phi \qquad (7.24)
$$

の形に書けるので，次のような質量演算子 M^2 の固有関数

$$
M^2\varphi_n(y) = m_n^2\varphi(y)\,, \quad M^2\varphi_n(y) \;\equiv\; -\,\mathrm{e}^{2A}\partial_y\left[\mathrm{e}^{-4A}\partial_y\varphi_n(y)\right] \qquad (7.25)
$$

の完全系を用いればよい．また最終的に得られる四次元場の運動項が正しく規格化されるように，$\varphi_n(y)$ に対する規格化直交条件として，式 (3.6) の代わりに

* このことはスカラー曲率の形 $R^{(5)} = G^{MN}R_{MN}$ を式 (7.21) と比較すれば予想できる．

$$\int_{-\pi R}^{\pi R} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-2A(y)} \varphi_m(y)\, \varphi_n(y) = 2\int_0^{\pi R} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-2A(y)} \varphi_m(y)\, \varphi_n(y)$$
$$= \delta_{mn} \tag{7.26}$$

を課す必要がある．

四次元場 $\phi^{(n)}(x)$ は質量 m_n をもった粒子の生成消滅を表す．このとき重要なことは，規格化条件 (7.26) に余分の因子 $\mathrm{e}^{-2A(y)}$ があるため，**余次元内の特定の位置に粒子を見い出す確率**は，単純な $|\varphi_n(y)|^2$ ではなく

$$\rho_n(y) = \mathrm{e}^{-2A(y)} \left|\varphi_n(y)\right|^2 = \left|\widehat{\varphi}_n(y)\right|^2, \quad \widehat{\varphi}_n(y) \equiv \mathrm{e}^{-A(y)} \varphi_n(y) \tag{7.27}$$

となることである．この $\widehat{\varphi}_n(y)$ は余分な因子のない規格化条件を満たす

$$\int_{-\pi R}^{\pi R} \mathrm{d}y\, \widehat{\varphi}_m(y)\, \widehat{\varphi}_n(y) = 2\int_0^{\pi R} \mathrm{d}y\, \widehat{\varphi}_m(y)\, \widehat{\varphi}_n(y) = \delta_{mn} \tag{7.28}$$

ので，余次元内での局在化の様子やその物理的帰結を見通しよく考察できる*．

さて問題は，式 (7.25)–(7.26) を満たす関数系を具体的に求めることである．まずゼロモードを考えよう．作用 (7.21) の形から明らかなように，余次元方向に定数の配位 $\Phi(x,y) \sim \phi^{(0)}(x)\,\varphi_0$ は最低エネルギー状態に対応し，運動方程式 (7.25) の解になる．このゼロモード解を再規格化して表すと

$$\text{定数}\, \varphi_0 \implies \widehat{\varphi}_0(y) = \varphi_0\, \mathrm{e}^{-A(y)} = \sqrt{\frac{k}{1-\mathrm{e}^{-2\pi kR}}}\, \mathrm{e}^{-k|y|} \tag{7.29}$$

のように，**定数配位であったゼロモードが，RS 背景時空上では局在した配位を表す**ことになる．ただし，定数 φ_0 の値は規格化条件 (7.28) より決めた．

これが RS 模型で重力場の局在化が実現される第一の理由 (a) である．最初に述べたように，重力場のゆらぎ $h_{\mu\nu}(x,y)$ はゼロ質量のスカラー場と同じ形の波動方程式を満たすので，式 (7.29) を用いて，重力場のゼロモードが媒介する力のポテンシャル $V_0(r)$ を計算することができる．$\oplus$-ブレイン上に束縛された質点 m_1 と m_2 の距離を r とすると，重力場のゼロモードが $\oplus$-ブレインの位置に滞在する確率 $\rho_0(y=0) = |\widehat{\varphi}_0(0)|^2$ を用いて

* この事情は，中心力場の量子力学を極座標で解く際の動径波動関数とよく似ている．なお，ここでの**再規格化(rescaling)**はウェイト $w=1$ のワイル変換 $\Phi = \mathrm{e}^{wA}\widehat{\Phi}$ になっているが，五次元 RS 時空でのバルク場の局在の様子は，おおよそこのウェイトで支配される．

$$V_0(r) = G_{(4+1)} \, |\widehat{\varphi}_0(0)|^2 \, \frac{m_1 m_2}{r} = \left[\frac{M_5^3}{k} \left(1 - \mathrm{e}^{-2\pi k R} \right) \right]^{-1} \frac{m_1 m_2}{8\pi r} \quad (7.30)$$

これを四次元での重力法則 (5.4) と比較すると，§ 7.1 で予告した通り，四次元プランク質量に対する表式 (7.9) が得られる．こうして，四次元での重力定数をゼロにすることなく，コンパクト化の半径 R を無限大にできるのである．

7.4　重力場の局在化——KK モード

§ 7.3 では，重力場のゼロモードが $\oplus$-ブレインに局在するおかげで，余次元半径を無限大にできることを述べた．しかし § 3.3 で述べたことを思い起こすと，これだけでは不十分である．つまり，余次元が本当に隠されていることをいうためには，力のポテンシャルに対する KK モードの寄与を足しあわせて，それが万有引力の法則 (5.4) を変更しないことをいう必要がある．

KK モードの波動関数 $\widehat{\varphi}_n(y)$ が満たすべき方程式 (7.25) は

$$-\,\mathrm{e}^{-A} \left(\partial_5 - 2A' \right) \left(\partial_5 + 2A' \right) \left[\mathrm{e}^{-A} \, \widehat{\varphi}_n(y) \right] = m_n^2 \, \widehat{\varphi}_n(y) \quad (7.31)$$

と書ける．これはハミルトニアン (7.12) を用いたシュレーディンガー方程式と本質的に同じ式であり，$A''(y)$ の部分に図 7.4 にあるようなデルタ関数の特異性が含まれている．以下では，その特異性を避けるために $\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ 上で考えよう．

方程式 (7.31) は変数変換（k は次元合わせの因子，定数 N_n は規格化定数）

$$w \equiv \mathrm{e}^{A(y)}, \quad \lambda_n \equiv \frac{m_n}{k}, \quad Z_2(\lambda_n w) \equiv \frac{N_n}{\sqrt{k}} \, \mathrm{e}^{-A(y)} \, \widehat{\varphi}_n(y) \quad (7.32)$$

により，ベッセルの微分方程式（次数 $\nu = 2$ の場合）に書き換えられる．つまり

$$\left[w \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} - \nu \right] \left[w \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} + \nu \right] Z_\nu(\lambda_n w) = -\lambda_n^2 \, w^2 \, Z_\nu(\lambda_n w) \quad (7.33)$$

また境界条件 (7.22) は $\boldsymbol{S}^1/\boldsymbol{Z}_2$ の両端 $w_0 \equiv \mathrm{e}^{A_0} \equiv \mathrm{e}^{A(y_0)}$，$w_1 \equiv \mathrm{e}^{A_1} \equiv \mathrm{e}^{A(y_1)}$ で

$$0 = \left[w \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} - 2 \right] Z_2(\lambda_n w) \propto Z_1(\lambda_n w) \quad (7.34)$$

と書き換えられる．

方程式 (7.33) の一般解は，ベッセル関数とノイマン関数の重ね合わせ

$$Z_2(\lambda_n w) = J_2(\lambda_n w) \cos \alpha_n - Y_2(\lambda_n w) \sin \alpha_n \quad (7.35)$$

であり*，規格化条件や境界条件を用いた計算の結果，最終的な形として

$$\widehat{\varphi}_{n\neq 0}(y) = \sqrt{\frac{k}{1-C_n^2}}\ \mathrm{e}^{-k|\pi R - y|}\ \frac{Z_2\big(\lambda_n \mathrm{e}^{A(y)}\big)}{Z_2(\lambda_n \mathrm{e}^{A_1})}$$

$$C_{n\neq 0} \equiv \frac{\mathrm{e}^{-A_1} Z_2(\lambda_n)}{Z_2(\lambda_n \mathrm{e}^{A_1})} \tag{7.38}$$

が得られる．ただし $C_{n\neq 0} \sim \mathrm{e}^{-\pi k R/2} \ll 1$ である．

相対係数 $\tan\alpha_n$ や固有値 $\lambda_n \equiv m_n/k$ は境界条件 (7.34) で決定される．$w = w_0$ でのオビフォルド化条件より

$$\tan\alpha_n = \frac{J_1(\lambda_n)}{Y_1(\lambda_n)} \sim -\frac{\pi}{4}\lambda_n^2 \tag{7.39}$$

$w = w_1$ でのコンパクト化条件より，KK モードの質量固有値を決める方程式

$$0 = Z_1(\lambda_n w_1) \propto \det \begin{vmatrix} J_1(\lambda_n w_1) & Y_1(\lambda_n w_1) \\ J_1(\lambda_n w_0) & Y_1(\lambda_n w_0) \end{vmatrix} \tag{7.40}$$

が得られる．$w_0/w_1 = \mathrm{e}^{-\pi k R} \ll 1$ に注意して漸近形 (7.36) を用いると，これを $J_1(\lambda_n w_1) \approx 0$ と近似できるので，KK モードの質量を

$$\frac{m_n}{k}\mathrm{e}^{\pi k R} = \mathcal{O}(n) \Longrightarrow m_n = \mathcal{O}(n) \times k\,\mathrm{e}^{-\pi k R} \tag{7.41}$$

と見積もることができる．このように，RS_+ 模型の KK モードは，五次元のスケール k に比べて指数関数的に小さい質量をもつ．また半径 $R \to \infty$ の極限でゼロ質量になるのは平坦時空と同様である．

以上のようなこみ入った計算を経た結果，KK モードの波動関数が得られた．この結果からわかる重要な点は，**KK モードがゼロモードと反対側に局在する**ということである．実際，ゼロモード (7.29) は $y = 0$ に局在していたのに対し，KK モード (7.38) は，振動因子のほかに $\mathrm{e}^{-k|\pi R - y|/2}$ に比例しており，$y = \pi R$ に波動関数が集中している．この様子をまとめたのが § 7.1 の図 7.3 である．

* 整数次 $(\nu \neq 0)$ のベッセル関数は

$$\text{for } |z| \ll 1\ ,\ J_\nu(z) \sim \frac{1}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}, \qquad Y_\nu(z) \sim -\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \tag{7.36}$$

$$\text{for } |z| \gg 1\ ,\ J_\nu(z) + iY_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ \exp\left[i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right] \tag{7.37}$$

のように振る舞うものである．これらの特殊関数については数学公式集 53) を参照してほしい．

このようにゼロモードと KK モードの振る舞いが大きく異なることが，RS 模型において重力場の局在化が実現される第二の理由である．実際，KK モードが $\oplus$-ブレインの場所で見い出される確率 $\rho_n(y=0)$ を見積もろう．半径が大きい極限では KK モードの質量がゼロに近づくので，おおよその振る舞いは $n \gg 1$ の波動関数で決まることになる．漸近形 (7.37) を用いて計算すると

$$\widehat{\varphi}_n(y) \sim \sqrt{\frac{k}{1-\mathrm{e}^{-\pi kR}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}|\pi R - y|}\cos\left(n\pi\frac{\mathrm{e}^{\pi k|y|}-1}{\mathrm{e}^{\pi kR}-1}\right) \qquad (7.42)$$

となるので

$$\rho_{n\neq 0}(0) = |\widehat{\varphi}_n(y=0)|^2 = \frac{k}{1-\mathrm{e}^{-\pi kR}}\,\mathrm{e}^{-\pi kR} \propto m_n \qquad (7.43)$$

となる．その結果，KK モードによる $\oplus$-ブレイン上での重力ポテンシャルは，湯川ポテンシャル (2.7) の和 $\sum_n$ を積分 $\int \mathrm{d}(m/k)$ で置き換えて，さらに $G_{\mathrm{N}} \sim k/M_5^3 = kG_{(4+1)}$ の関係 (7.9) を用いると，おおよそ

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{KK}}(r) &\sim G_{(4+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(y=0)\,\frac{m_1 m_2}{r}\,\mathrm{e}^{-m_n r} \\ &\sim \frac{G_{\mathrm{N}}}{k}\,\frac{m_1 m_2}{r}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\left(\frac{m}{k}\right)\frac{m}{k}\,\mathrm{e}^{-mr} = G_{\mathrm{N}}\,\frac{m_1 m_2}{r} \times \frac{1}{k^2 r^2} \end{aligned} \qquad (7.44)$$

となる．これをゼロモードによる寄与 (7.30) と併せると，望みの結果 (7.10) が得られたことになる．

このようにして，RS_+ 模型における‘非コンパクトな余次元’は，重力という「次元のセンサー」を用いてさえも，その存在が四次元世界に顔を出さないようになっている．——まさに「隠された次元」である．このことを，**「そのような余次元は実質的にコンパクト化されている」**と解釈することもできるだろう*.

いずれにせよ，RS 時空における重力場の振る舞いは，非コンパクトな余次元を可能にしたり，四次元世界の重力の弱さを説明したり，なかなか魅力的なものである．ここで述べた RS 時空のような，非因子型の歪曲した余次元の可能性は，まだまだ思いもかけない新しい物理の展開を見せてくれる予感がする．

---

* 「物質場やゲージ場，そして重力場が存在しているところこそが時空なのだ」と考えると，重力場さえもが局在するということは，余次元が「存在する」とか「存在しない」とかいう言い方にはもはや意味がなくなるとさえいえるかもしれない．

8章 終わりに

この解説では，われわれの四次元世界の背後に，余分の空間次元——余次元(extra dimensions)——が存在するとしたら，そこにどんな物理があるのか，どのようにして四次元時空の現象から隠されているのか，を検討してきた．

重力の量子化まで含めて統一理論を考えようとすると，高次元の時空を考えざるを得なくなる．しかし，素朴に高次元の理論を考えると，力の法則が経験的に知っているものからずれてしまう．このことを踏まえた「隠された余次元」の可能性として，カルーツァ以来の伝統的な「コンパクト化」の考え方を解説しながら，さらに，最近浮上してきた「ブレイン世界」の発想を紹介してきた．

「ブレイン世界」の考え方は，新しい時空観につながる面白い考え方である．このブレイン世界を動的(ダイナミカル)につくってみせるためには，物質場，ゲージ場，そして重力場を高次元時空の中に「局在」させることが課題になる．「ものが局在する」という現象そのものは，目新しいものではなく，二次元膜を作るシャボン玉や一次元的に延びる渦糸などで日常的にもなじみ深いものではある．こういうイメージを取っ掛かりにして，四次元時空内でも，場の局在化が起こる例も知られていた．このように考えれば，ブレイン世界の試みを通じて浮かび上がってきたのは，われわれの世界そのものがより大きい次元の空間内に局在してできているかもしれない，という発想の転換だったのである．第 5 章以降で検討してきたのはこの可能性なのであった．

重力現象を時空の内在的(intrinsic)な幾何学で記述したアインシュタインの思想からみれば，高次元の中に埋め込まれたブレイン世界を考えるシナリオは，如何にも泥くさく，物理の理解としては後退しているように思われるかもしれない．果たしてそうだろうか？

自然現象は，われわれが想像しているよりはるかに豊富で多様である．だか

らこそ面白いのである．簡単明瞭な原理といえども，そのままの形で現象に現れるとは限らない．例えば，素粒子の「相互作用を支配する」ゲージ原理にしても，単純なクーロン則に従う電磁相互作用もあれば，弱い相互作用のように，自発的に破れた対称性が実現している場合もある．また，複雑怪奇にみえたハドロン現象やその強い相互作用の背後には，閉じ込め相にある対称性が隠れていた．強い相互作用や弱い相互作用もまた厳然としてゲージ原理が貫徹していたことがわかったのである．こうして，20 世紀後半の素粒子物理学の発展を振り返ると，いったん後退したかにみえる泥くさい研究の過程を経て，複雑な現象の背後に隠された対称性が美しい姿をみせてくれたのである．

この解説では，しばしば「隠された次元」という言葉を使ってきたが，実は，この「隠された対称性」を意識していたのである．現在の素粒子論には，「宇宙項問題」や「階層性問題」をはじめ，「素粒子の世代構造」——繰り返しの謎——といった，まだまだ尽きせぬ謎があるが，それらの背後には何が隠されているのだろう．これらの謎は，従来の対称性の考え方だけではなかなか解決が難しく，それに代わるものとして，隠された余次元が鍵を握っているのかもしれない．この解説では触れることができなかったが，素粒子論の最前線ではすでに，この方向でいくつかの新しい試みがなされている(例えば文献 54–57))．それはまた，時空概念に対する大きな変更をもたらすことも予感させるものである．

もちろん，この新しい時空像が，単に物の捉え方や解釈の域にとどまっていることはできない．物理である以上，実験で確かめることのできる現象を予言する必要がある．ではどのような観測や実験とかかわってくるのだろうか．余次元のセンサーとして最も可能性のあるのは，なんといっても重力場である．そしてその余次元方向の大きさは，§5.3 で紹介したように，プランクスケールよりずっと手前，ひょっとしたらミリメートルのスケールかもしれないし，TeV スケールかもしれない．これに刺激されて，力のべき則のずれを精密に測定しようという試みも活発に議論されている．また第 3 章で述べたように，余次元に拡がる場があれば，大きな質量をもった一連の KK モードが四次元で観測されるはずである．次世代の高エネルギー加速器実験では，ヒッグス粒子や超対称性から予言される粒子と並んで，KK 励起状態も重要な探索の目標になっている．

今まで物理が目指してきたのは，自然現象をより優雅で明快な形式で理解することであった．素粒子の標準模型への道程をふりかえると，現象の背後に隠された対称性を透徹した審美眼で見抜き，すっきりした理解をしてはじめて，本当に「わかった」と納得がいく．複雑なパラメータを調整して実験結果を再現しただけでは満足しないのが，素粒子屋さんである．複雑な現象から規則性を見い出し，単純な原理として捉えなおすことで，本質に迫ろうとする．こうしてこそ，はじめて貫徹した論理に到達するはずである．またそうだからこそ，複雑なハドロン現象を第一原理から演繹的に解析できる道筋を見極めてきたし，タイプも強さも異なる素粒子の相互作用をゲージ原理という統一的な形で理解することに成功してきたのであった．

そして今，四次元の時空から自由に飛び出して，より広い時空のなかで俯瞰してみたとき，隠れた原理が背後にありそうだと直観しているのである．

もちろん，「何故この世は四次元(空間三次元と時間一次元)なのか？」という問いに対する答えを持っているわけではない．そのような原理的な「何故」は，その時点その時点での科学の到達範囲では，なかなか答えられないことが多い．科学における「何故」という問いは，それが解決可能な段階になってはじめて，科学の対象としての意味をもつ．科学の最先端では，常識を破って少し先の問題を「先走り」して取り上げるのである．そして今，余次元の物理を通して，時空の次元についての「何故」も，射程距離に入りつつあるのかもしれない．

余次元の物理は，四次元宇宙や素粒子論の統一的な理解と深くかかわっている．このような方向は，時空の概念の変革をもたらすのではないかとも予感させる．物質場もゲージ場も，そして重力場も含めてすべての場が存在するところに時空という概念が成立する，ある意味では時空すら相対的な概念なのだという発想の転換がそこにはある．

21 世紀は，時空の概念をかえるような面白い物理の展開が期待されている．楽しみな時代である．

「できるだけやさしい言葉で」と心がけて，時には激論を交してここまでたどりついた．特に多次元理論の先駆者である田中 正先生にはいろいろお教えいただいた．また，京都大学の素粒子研究室の皆さんには議論につきあっていただいた．これらの方々に感謝したい．

参考文献

1) Th. Kaluza : *Sitzber. Preuss. Akad. d. Wiss.*, **K1**, 966 (1921); O. Klein : *Z. Phys.*, **37**, 895 (1926); *Nature*, **118**, 516 (1926)
2) 田中 正 : 多次元統一場理論と素粒子 (物理学最前線 **7**), 共立出版 (1984); 物理学的世界像の発展——今日の科学批判によせて, 岩波書店 (1988)
3) A. G. Riess *et al.* : *Astrophys. J.*, **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter *et al.* : *Astrophys. J.*, **517**, 565 (1999)
4) A. H. Jaffe *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3475 (2000)
5) S. Weinberg : *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1 (1989)
6) 坂東昌子, 九後汰一郎 : パリティ 2001 年 4 月号, 6 ページ
7) 内山龍雄 : 物理学はどこまで進んだか——相対論からゲージ論へ, 岩波書店 (1983)
8) M. E. Peskin & D. V. Schroeder : An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley, Chap. 4 (1995)
9) 宮沢弘成 : クォーク閉じ込め (物理学最前線 **1**), 共立出版 (1982); 岩崎洋一 : 格子ゲージ理論 (物理学最前線 **11**), 共立出版 (1985)
10) H. Hatanaka, T. Inami & C. S. Lim : *Mod. Phys. Lett.*, **A13**, 2601 (1998)
11) K. R. Dienes, E. Dudas & T. Gherghetta : *Phys. Lett.*, **B436**, 55 (1998); *Nucl. Phys.*, **B537**, 47 (1999)
12) M. Bando, T. Kobayashi, T. Noguchi & K. Yoshioka : *Phys. Lett.*, **B480**, 187 (2000)
13) Y. Imamura, T. Watari & T. Yanagida : hep-ph/0103251
14) 九後汰一郎 : ゲージ場の量子論 I, II, 培風館 (1989)
15) L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa & E. Witten : *Nucl. Phys.*, **B261**, 651 (1985); *Nucl. Phys.*, **B274**, 285 (1986); L. Dixon, D. Friedan, E. Martinec & S. Shenker : *Nucl. Phys.*, **B282**, 13 (1987)
16) L. E. Ibáñez, J. Mass, H. P. Nilles & F. Quevedo : *Nucl. Phys.*, **B301**, 157 (1988); Y. Katsuki, Y. Kawamura, T. Kobayashi, N. Ohtsubo, Y. Ono & K. Tanioka : *Nucl. Phys.*, **B341**, 611 (1990)
17) T. Kobayashi & H. Nakano : *Nucl. Phys.*, **B496**, 103 (1997)
18) Y. Kawamura : *Prog. Theor. Phys.*, **103**, 613 (2000); hep-ph/0012125; R. Barbieri, L. J. Hall & Y. Nomura : *Phys. Rev.*, **D63**, 105007 (2001)
19) N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos & G. Dvali : *Phys. Lett.*, **B429**, 263

(1998); N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos & G. Dvali : *Phys. Lett.*, **B436**, 257 (1998)

20) 例えば, B. Schwarzshild : パリティ 2001 年 4 月号, 45 ページ
21) M. B. Green, J. H. Schwarz & E. Witten : Superstring Theory I, II, Cambridge Univ. Press (1987)
22) J. Polchinski : String Theory I, II — Superstring Theory & Beyond, Cambridge Univ. Press (1998)
23) M. B. Green & J. H. Schwarz : *Phys. Lett.*, **149B**, 117 (1984); *Phys. Lett.*, **149B**, 117 (1984)
24) R. Brandenberger & C. Vafa : *Nucl. Phys.*, **B316**, 391 (1989)
25) E. Witten : *Nucl. Phys.*, **B445**, 85 (1995)
26) J. Polchinski : TASI Lectures on D-Branes in Fields, Strings & Duality, TASI 1996 eds. C. Efthimiou & B. Greene : World Scientific (1997), hep-th/9611050.
27) E. Bergshoeff, E. Sezgin & P. K. Townsend : *Phys. Lett.*, **B189**, 75 (1987)
28) S. Ejiri, J. Kubo & M. Murata : *Phys. Rev.*, **D62**, 105025 (2000)
29) P. Dimopoulos, K. Farakos, A. Kehagias & G. Koutsoumbas : hep-th/0007079; P. Dimopoulos, K. Farakos, C. P. Korthals-Altes, G. Koutsoumbas & S. Nicolis : *JHEP* **0102**, 005 (2001)
30) P. Horăva & E. Witten : *Nucl. Phys.*, **B460**, 506 (1996); *Nucl. Phys.*, **B475**, 94 (1996)
31) E. Witten : *Nucl. Phys.*, **B471**, 135 (1996)
32) A. Lukas, B. Ovrut & D. Waldram : *Nucl. Phys.*, **B540**, 230 (1999)
33) A. Lukas, B. Ovrut, K. S. Stelle & D. Waldram : *Phys. Rev.*, **D59**, 086001 (1999); *Nucl. Phys.*, **B552**, 246 (1999)
34) M. Bando, T. Kugo, T. Noguchi & K. Yoshioka : *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3601 (1999)
35) H. Hatanaka, S. Matsumoto, K. Ohnishi & M. Sakamoto : *Phys. Rev.*, **D63**, 105003 (2001); S. Matsumoto, M. Sakamoto & S. Tanimura : hep-th/0105196
36) V. A. Rubakov & M. E. Shaposhnikov : *Phys. Lett.*, **125B**, 136 (1983)
37) E. Witten : *Nucl. Phys.*, **B188**, 513 (1981); *Nucl. Phys.*, **B202**, 253 (1982)
38) E. Bergshoeff, R. Kallosh & A. Van Proeyen : *JHEP* **0010**, 033 (2000); T. Fujita, T. Kugo & K. Ohashi : hep-th/0106051
39) K.-I. Akama : hep-th/0001113
40) L. Randall & R. Sundrum : *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3370 (1999)
41) L. Randall & R. Sundrum : *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4690 (1999)

42) V. A. Rubakov & M. E. Shaposhnikov : *Phys. Lett.*, **125B**, 139 (1983)
43) T. Gherghetta & M. Shaposhnikov : *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 240 (2000); I. Oda : *Phys. Lett.*, **B496**, 113 (2000)
44) S. Hayakawa & K.-I. Izawa : *Phys. Lett.*, **B493**, 380 (2000); hep-th/0106101
45) J. D. Lykken & L. Randall : *JHEP* **0006**, 014 (2000)
46) W. D. Goldberger & M. B. Wise : *Phys. Rev.*, **D60**, 107505 (1999); *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4922 (1999)
47) T. Ozeki & N. Shimoyama : *Prog. Theor. Phys.*, **103**, 1227 (2000)
48) A. Chamblin & G. W. Gibbons : *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 1090 (2000); T. Shiromizu, K. Maeda & M. Sasaki : *Phys. Rev.*, **D62**, 024012 (2000); J. Garriga & T. Tanaka : *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2778 (2000)
49) C. Csáki, J. Erlich, T. J. Hollowood & Y. Shirman : *Nucl. Phys.*, **B581**, 309 (2000)
50) Y. Grossman & M. Neubert : *Phys. Lett.*, **B474**, 361 (2000); S. Chang, J. Hisano, H. Nakano, N. Okada & M. Yamaguchi : *Phys. Rev.*, **D62**, 084025 (2000); T. Gherghetta & A. Pomarol : *Nucl. Phys.*, **B586**, 141 (2000)
51) T. Nihei : *Phys. Lett.*, **B465**, 81 (1999); N. Kaloper : *Phys. Rev.*, **D60**, 123506 (1999)
52) H. Verlinde : *Nucl. Phys.*, **B580**, 264 (2000); M. J. Duff, J. T. Liu & K. S. Stelle : hep-th/0007120
53) 森口繁一他 : 数学公式集 III (岩波全書, 1960); 犬井鉄郎 : 特殊函数 (岩波全書, 1962)
54) N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, N. Kaloper & R. Sundrum : *Phys. Lett.*, **B480**, 193 (2000); S. Kachru, M. Schulz & E. Silverstein : *Phys. Rev.*, **D62**, 045021 (2000)
55) R. Bousso & J. Polchinski : *JHEP* **0006**, 006 (2000)
56) E. A. Mirabelli & M. E. Peskin : *Phys. Rev.*, **D58**, 065002 (1998)
57) L. Randall & R. Sundrum, *Nucl. Phys.*, **B557**, 79 (1999)

量子テレポーテーション

古澤　明

1章 はじめに

量子テレポーテーションという言葉を聞いて，人はどのように思うだろうか？　大多数の人はSF小説の中での空想の産物と思うだろう．テレポーテーションという言葉はかなり以前からSF小説の中ではポピュラーな存在であり，テレポーテーションと聞いてどういうことか想像できない人は多分いないであろう．宇宙船の中からどこかの星の上に瞬時に移動するという「あれ」である．

ここで解説する量子テレポーテーションも，ある意味ではSF小説のそれと同じものであり，それが現実に行われているというと違和感を覚える人も多いかもしれない．実際，私の論文[1)]もマイケル・クライトンの最新SF小説『タイムライン』に登場するので，かなり眉唾な話と思われている方も多いのではなかろうか．ただ，量子テレポーテーションにはSF小説と異なる点もある．最も大きく異なる点は，送っているものが波動関数であるということであろう(『タイムライン』では人間も送れることになっているが...)．

ご存じのように，波動関数はミクロな系の状態を記述する量子力学的表現あるいはその系に関する「情報」である．波動関数が本当に実在するかどうかは物理学のホットな話題であり[2)]，議論が分かれるところではあるが，少なくともミクロな系の状態を記述するには必要十分である．つまり，「情報」としては必要十分である．量子テレポーテーションでは，波動関数(量子情報 $|\psi\rangle$)を情報の送り手(アリス)から情報の受け手(ボブ)に送る(図1.1)．

波動関数がやっかいなのは，測定によりその状態が乱されてしまうことである．波動関数を完全に規定するには2つの(共役な)物理量(位置と運動量など)を決めなければならない．これは「波動」関数の名前が示すように，本質的に振幅と位相の2つの成分をもつためである．しかし，(共役な) 2つの物理量を同時に決めることはできない．これは量子力学のもうひとつの根幹である不確

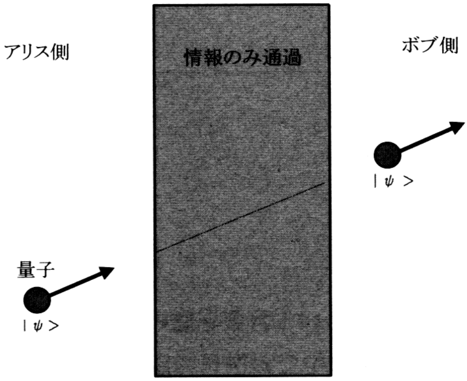


図 1.1　量子テレポーテーション概念図.

定性原理による.

それでは，どうしたら量子力学に矛盾せずアリスは波動関数の完全な情報を得，その情報をボブに送り，量子テレポーテーションを行うことができるのであろうか？　その答えは次章以降に解説する量子エンタングルメント(もつれ)の不思議な効果にある．余談になるが，もし人間を構成するすべての原子核および電子の量子情報(波動関数)を送ることができれば，原子核や電子に個性はないから，全く同種の原子核と電子を用いて，送り先で人間を再現できるのかもしれない．そうすれば，本当のテレポーテーションをしたことになる？？少なくともひとつの原子についてはそのような提案がある[3].

量子テレポーテーションはある意味で量子コンピュータである．図 1.2[4]に示すように，量子テレポーテーションは，量子回路によって構成された量子コンピュータとして書ける．これは，アリスに入力された量子状態(波動関数 $|\psi\rangle$)が，ボブのところからそのまま出力されるという恒等演算(つまり 1 を掛ける)専用の量子コンピュータとなっている．恒等演算そのものにあまり意味はないかもしれないが，量子回路の一部を変更すると汎用量子コンピュータを構成できることが示されている[5]．つまり，量子テレポーテーションの研究は量子コンピュータの研究でもあるのである.

量子テレポーテーションや量子コンピュータは，量子暗号などと併せて量子情報技術と呼ばれており，現在非常に注目されている分野のひとつである．こ

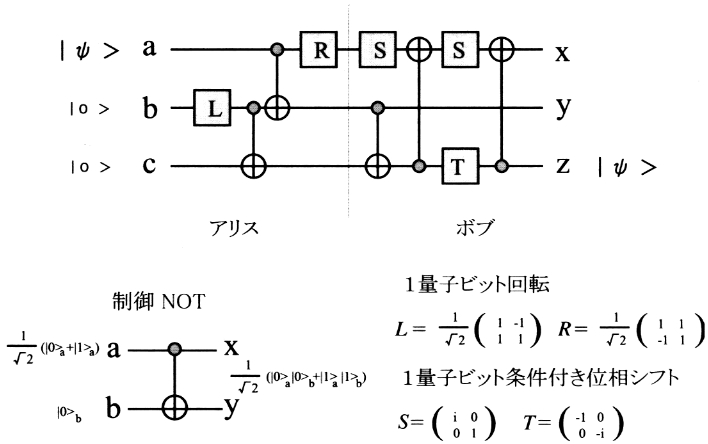


図 1.2　量子コンピュータとしての量子テレポーテーション．制御 NOT(Controlled NOT, Exclusive OR) 演算と 1 量子ビットのユニタリー変換（L, R, S, T など）でユニバーサルな量子コンピュータを構成できることが知られている．

れにはいくつかの理由がある．まず，微細加工技術の進歩の結果，2000 年現在においても，LSI 中の 1 つのトランジスタを駆動するのにおよそ 1000 個の電子しか使われておらず，現在の技術革新のスピードがそのまま保たれたとすると，2020 年には 1 つのトランジスタを駆動するのに 1 個以下の電子しか使えないことになってしまう[6)]．

そのような領域ではトランジスタの動作そのものが古典力学では記述できなくなり，純粋に量子力学で記述されるようになる．これは明らかに量子コンピュータ出現の必然性と考えられる．また，計算機のプロセッサ(CPU)の発熱の問題も深刻で，量子コンピュータのように原理的に熱の授受を伴わない計算機の開発は非常に有用であると考えられる．さらに，インターネットにおける情報の安全性の問題も深刻になりつつあり，原理的に情報の傍受が不可能な量子暗号開発に大きな期待が寄せられている．後述するが，量子テレポーテーションはそのままで量子暗号としても機能する．したがって，量子テレポーテーションは量子情報技術の中核あるいはそのものといっても過言ではないだろう．

話は少し逸れるが，次章に説明する量子エンタングルメントを用いて，微細加工技術のひとつである光リソグラフィーの高性能化を行おうという提案もあ

る[7]．量子情報技術が逆に微細加工技術にも役立つという良い協調関係が生まれつつある．

2章 量子エンタングルメント

2量子間の量子エンタングルメント(量子力学的不可分性)は，アインシュタイン，ポドルスキー，ローゼン(A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen)の3人によって唱えられた，いわゆるEPRのパラドックス[8)]に由来する．彼らは，量子力学の不完全性を指摘するため以下のような主張を行った(図2.1).

「空間のある場所に原子核が静止していたとする．あるとき，突然その原子核が等しい質量をもつ原子核A，Bに分裂したとする．最初静止していた場所を座標原点とし，Aの位置をXとすれば，運動量保存則からBの位置は$-X$となる．同様に，最初静止していたから，Aの運動量をPとすれば，Bの運動量は$-P$となる．もし，Aの位置を測定し，その値Xを確定すれば，Bの位置は測定による擾乱を受けることなく自動的に$-X$に決まる．その後，Bの運動量を測定すればBの運動量も決まるから，Bの位置と運動量は同時に確定できることになり，不確定性に反する．したがって，量子力学は不完全な理論である.」

これに対して，ボーア(N. Bohr)らがアインシュタインの相対論「情報は光速を超えて伝わらない」を用いて反論し[9)]，現在では実験的にもパラドックス**ではない**ことが証明されている．特に，ボーム(D. Bohm)により，上述した共役物理量つまり連続量の問題から，スピンのアップ・ダウンのような2次元の問

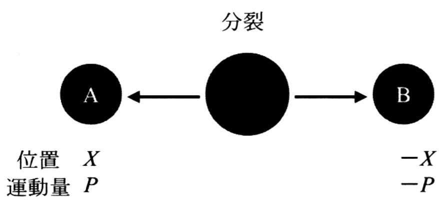


図 2.1 EPRのパラドックス.

題にランクダウンされ，ベル(J. S. Bell)により数式(ベルの不等式)[10)]で示されてからは，量子光学的実験の容易さと相まって，この2次元版EPRパラドックス反証実験が精力的に行われた．最も有名な実験はアスペ(A. Aspect)の実験であろう[11)]．

いずれにしても，多くの実験によりEPRのパラドックスは「パラドックス**ではない**」ことが証明されたので，このような状態は現実に存在するのである(EPRペア，EPR相関と呼ばれている)．もちろん，EPR相関が存在するのは量子力学的状態つまり波動関数が保たれている場合のみであることに注意しなければならない．巨視的な系で，このようなEPR相関が存在するかどうかは今後明らかになっていくと思われる．

EPR相関が存在すると，非常に不思議なことが起こるようになる．例えば，アインシュタインらの最初の主張のように，原子核の位置と運動量で考えてみよう．EPR相関をもっている原子核ペアをそれぞれA，Bとして，Aの運動量を測定しPという値を得たとすると，Bの運動量は何もしなくても瞬時に$-P$になってしまうのである．AとBがそれぞれ何億光年離れた宇宙の果てにあってもである．これはアインシュタインならずとも不可思議に思うことであろう*．

ただし，多少の「言い訳」をすると，原子核Bをもっているボブはいつどんな物理量(位置か運動量か)が原子核Aにおいて測定されたかは知る由もないので，結局情報は伝わっていない．原子核Aを測定したアリスから「私は運動量を測定した」という情報を得て初めて自分の運動量はアリスと同じ(符号は反転しているが)と気づくのである．このとき情報が完全に伝わったことになるので，情報伝達の速度はアリスからのメッセージの速度ということになる．したがって，通信の速度は光速を超えられないから相対論には矛盾しない．ここまで書くと，EPR相関なんて使い物にならないのではないかと思う人もいるであろう．しかし，次章で説明するように非常に有用なのである．

---

*アインシュタインはこのことを“spooky”と表現した．

3章　2次元量子テレポーテーション

3.1　2次元量子テレポーテーション理論——ベネットらのスキーム

まず話を簡単にするために，2次元(スピンのアップ・ダウン，偏光の縦・横など)で考える．2つの状態を $|0\rangle$，$|1\rangle$ とし，2次元 EPR ペアの例を数式で表現すると以下のようになる．

$$|\mathrm{EPR}\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{\mathrm{A}}|1\rangle_{\mathrm{B}} - |1\rangle_{\mathrm{A}}|0\rangle_{\mathrm{B}}) \tag{3.1}$$

この式を解釈すると，A が 0 であれば B は必ず 1，A が 1 であれば B は必ず 0 というように，A を決めれば B は自動的に決まっていることがわかる．さらに，これが古典的な相関ではなく，量子力学的相関であることは式 (3.1) 中のマイナス符号に端的に表れている．復習になるが，波動関数には「位相」があり，古典量には「位相」はない．つまり，このように符号を含めて書けるということが量子相関なのである．

2次元の量子テレポーテーションは，1993年ベネット(C. H. Bennett)によって提案された．図 3.1 に概念図を示す．彼らの提案では以下に説明する「ベル測定」というのがミソで，巧妙に不確定性原理(限界)をすり抜けて量子テレポーテーションを可能にしている．

彼らは式 (3.1) を含む4つの EPR ペア状態を用いる(式 (3.1) $= |\psi^{(-)}\rangle_{\mathrm{AB}}$)．

$$\left|\psi^{(\pm)}\right\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{\mathrm{A}}\,|1\rangle_{\mathrm{B}} \pm |1\rangle_{\mathrm{A}}\,|0\rangle_{\mathrm{B}}\right) \tag{3.2}$$

$$\left|\phi^{(\pm)}\right\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{\mathrm{A}}\,|0\rangle_{\mathrm{B}} \pm |1\rangle_{\mathrm{A}}\,|1\rangle_{\mathrm{B}}\right) \tag{3.3}$$

これらは2次元の EPR ペア状態の基底になっており，発見者にちなんでベル基底と呼ばれる．

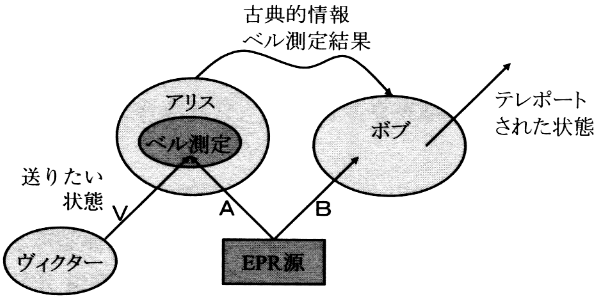


図 3.1　ベネットらにより提案された量子テレポーテーション.

量子テレポーテーションは次のように行う．まず，送るべき量子(状態)をヴィクターが用意する．2次元の場合，任意の状態は $|0\rangle$，$|1\rangle$ の線形結合で書けるから，規格化因子は省略して，$\alpha|0\rangle_{\mathrm{V}}+\beta|1\rangle_{\mathrm{V}}$ と書ける．EPR ペアとしてはベル基底のどれを用いてもよいのであるが，実験的要請から $\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{AB}}$ を用いる*.

添字からわかるように，量子 A をアリス，量子 B をボブが持つようにする．すると，アリス，ボブ，ヴィクター3人の状態は，3人の状態の積で書ける．すなわち，3人の状態は

$$
\begin{aligned}
(\alpha|0\rangle_{\mathrm{V}}+\beta|1\rangle_{\mathrm{V}})\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\Big[&\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}(-\alpha|0\rangle_{\mathrm{B}}-\beta|1\rangle_{\mathrm{B}})\\
&+\left|\psi^{(+)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}(-\alpha|0\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|1\rangle_{\mathrm{B}})\\
&+\left|\phi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}(\alpha|1\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|0\rangle_{\mathrm{B}})\\
&+\left|\phi^{(+)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}(\alpha|1\rangle_{\mathrm{B}}-\beta|0\rangle_{\mathrm{B}})\Big] \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

となる．式(3.4)の右辺は，左辺をヴィクターとアリスのベル基底で展開している．

テレポーテーションするには，まずアリスが送りたい量子の情報を測定しなければならないが，第1章で述べたように，通常の測定では量子状態を完全には決められない．そこで，アリスは「ベル測定」なるトリックを使う．アリスは，テレポートしたい量子と彼女が持っている EPR ペアの片割れである量子 A を一緒にしてある測定をする．

* 「2次元量子テレポーテーション実験」の節で述べる．

その測定では，式 (3.4) の右辺にあるヴィクターとアリスの 4 つのベル基底 ($|\psi^{(\pm)}\rangle_{VA}$, $|\phi^{(\pm)}\rangle_{VA}$) のうちのどれであるかを明らかにする*．測定が完了した瞬間，ボブの状態は確定し，あるベル基底の因子に収束する．例えば，アリスがベル測定により $|\psi^{(+)}\rangle_{VA}$ を得たとする．その瞬間，ボブの状態は $(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B)$ に収束する．光速を超えてボブの状態は，送りたかった状態 $(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B)$ に非常に近い状態になる．α，β の情報は何も送っていないのに！

ここで注意したいのは，先ほど「言い訳」したように，このままではボブには何の「情報」も届いていない．なぜなら，せいぜいボブが知っているのは，アリスがベル測定をしたかもしれないということだけで，いつアリスがベル測定をし，どのような結果を得たかということは知る由もない．また，ベル基底の 4 つの因子はどれも適当なユニタリー変換(ヒルベルト空間での回転)でヴィクターと同じ状態 $\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B$ に変換できるが，アリスからどのベル基底を観測したかという情報をもらわないことにはどのユニタリー変換をすればよいか見当もつかない．言葉を変えると，アリスのベル測定の前後で，ボブの(局所的な)状態に変化はない．つまり，アリスから情報をもらわなければ，ボブが自分の量子の状態を測定しても，その結果は 0 と 1 が等しい確率で出現することに変わりはない．これは，式 (3.4) からも明らかである．ベル測定によって，情報を伝達できる「ポテンシャル」のみが伝わったといえるかもしれない．したがって，「情報」そのものは光速を超えて伝わってはいない．

テレポーテーションの仕上げとして，上述したようにボブはアリスから「どのベル基底を観測した」という情報をもらい，それに基づいて適当なユニタリー変換を行い**，欲しかった状態 $\alpha|0\rangle_B+\beta|1\rangle_B$ を再生するのである．「再生」といったのは，アリスがベル測定をすることにより，ヴィクターの状態 $\alpha|0\rangle_V+\beta|1\rangle_V$ は壊れてしまうからである．したがって，量子テレポーテーションは量子ファックスではない．オリジナルは消滅してしまうのである．

もうひとつ注意したいのは，アリスはヴィクターの状態 $\alpha|0\rangle_V + \beta|1\rangle_V$ について，何も情報を得ていない．逆にこれが，不確定性を逃れるトリックなので

* ある意味では，ヴィクターとアリス間の量子エンタングルメントを生成していることになる．したがって，「ベル測定」を「エンタングルメント測定」と呼ぶことがある．

** 偏光状態であれば，波長板を回すことに相当する．

ある．もし，アリスが測定によりヴィクターの状態のある物理量について情報を得たとすると，前述したように，不確定性により，対になる共役物理量の情報は消えてしまい，アリスがヴィクターの状態の完全な情報を得ることはできない．むしろ何も得なければ，アリスが「情報」を消すということを回避できるのである．

このあたりの様子，つまり「どれだけアリスが情報を得てしまうと，どの程度ボブのところで再生される状態が不完全になるか」は，本解説の範囲を超えるが，ホフマン(H. F. Hofmann)らによりエレガントな数式で表現されている[13,31]．興味のある方は参照されたい．

3.2　2次元量子テレポーテーション実験

A．ザイリンガーグループの実験

過去に行われた量子テレポーテーション実験について解説する．最も有名な実験は，当時インスブルック大学にいたザイリンガー(A. Zeilinger)のグループの実験であろう[14]．彼らは前節のスキームを用い，光子の偏光状態をテレポートした．つまり，彼らの実験では，$|0\rangle$ が横偏光の光子，$|1\rangle$ が縦偏光の光子である．誤解を避けるため，これ以降横偏光の光子を $|\leftrightarrow\rangle$，縦偏光の光子を $|\updownarrow\rangle$ で表す．彼らの実験の概略を図 3.2 に示す．

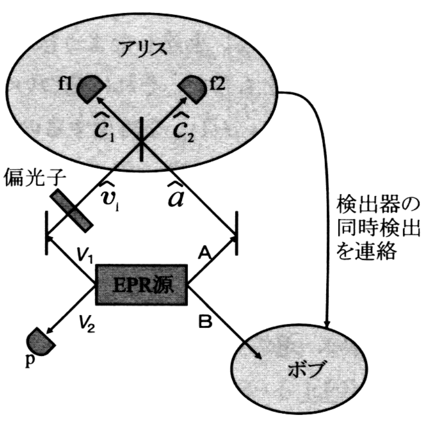


図 3.2　ザイリンガーグループによって行われた 2 次元量子テレポーテーション実験．

EPR ペアとしては，1 つのポンプ光子をエネルギーの等しい 2 つの光子に分割することに相当するパラメトリック過程*から生成される偏光 EPR ペアを用いており，これは $|\psi^{(-)}\rangle_{\rm AB}$ になっている．EPR ペアである光子 A，B をアリスとボブにそれぞれ送る．ベネットらのスキームにはないが，ヴィクターが送りたい光子を出したかどうか確かめるために，補助的にもう一組の EPR ペア $|{\rm EPR}\rangle_{V_1 V_2}$ を別のパラメトリック過程により生成している．光子 V_1 は送りたい光子としてアリスに送られ，光子 V_2 は光子 V_1 の存在保証のため検出器 p に送られる．実験の進め方は以下の通りである．

アリスはヴィクターから来た送りたい光子 V_1 と，自分の持つ EPR ペアの片割れである光子 A を 50% ビームスプリッターで合わせ，自分の持つ 2 つの検出器 f1，f2 で同時検出を行う．このとき，存在保証検出器 p と f1，f2 の 3 つに同時に光子が検出されれば，アリスとヴィクターの状態は $|\psi^{(-)}\rangle_{\rm VA}$ になっていることがわかる**．つまりベル測定がなされる．

次に，同時検出されたという情報(ベル測定結果)をボブに送る．ボブはそれに基づいてユニタリー変換(この場合は恒等変換—何もしない)を行えば，テレポーテーション完了である．また，p での検出により，ヴィクターからアリスに光子が渡ったことが保証されている．

$|\psi^{(-)}\rangle_{\rm VA}$ 決定(ベル測定)の「からくり」は式を用いて説明しよう[15]．検出される状態を $|f\rangle$ として，要するに測定により ${}_{\rm VA}\langle\psi^{(-)}|f\rangle = 1$ であることがわかればよいのである．つまり，f1，f2 の同時検出が ${}_{\rm VA}\langle\psi^{(-)}|$ と等価であることを示せばよい．

図 3.2 のように，ヴィクター，EPR 源(EPR ペア A，B を生成)からのビームスプリッターへの入力を，それぞれ量子力学的複素振幅として振る舞う消滅演算子 $\hat{v}_1$，$\hat{a}$ で表す[16]．同様に，ビームスプリッターからの出力をそれぞれ $\hat{c}_1$，$\hat{c}_2$ とする．このビームスプリッターは 50% ビームスプリッターであるから，位

* EPR の主張は，最初ひとつであった量子が 2 つの量子に分裂し，それらが EPR 相関をもつというものであるから，パラメトリック過程ではこれと等価な過程が起きているといえる．ここでのパラメトリック過程は，エネルギー的に縮退したパラメトリック過程であり，2 次高調波発生の逆の過程である．したがって，2 次の非線形光学結晶を用いることができる．また，縮退パラメトリック過程を用いたスクイーズド光発生と連続量の EPR 状態については後で述べる．

** 後で説明するが，光子 A と V_1 の光路に同時に 2 つ以上の光子が存在しないことが保証されたときのみである．

相を適当に選ぶと，$\hat{c}_1$，$\hat{c}_2$ と $\hat{v}_1$，$\hat{a}$ は次式で結ばれる．

$$\begin{cases} \hat{c}_1^j = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{v}_1^j + \hat{a}^j) \\ \hat{c}_2^j = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{v}_1^j - \hat{a}^j) \end{cases} \tag{3.5}$$

ここで，j は偏光方向を表し，$j = \leftrightarrow, \updownarrow$ である．

式 (3.5) を直観的に説明すると，反射では 1 つだけ屈折率小から大への入射があるため，位相が反転しマイナス符号が付くが，そのほかには位相の変化がなく，$1/\sqrt{2}$ の振幅(半分のエネルギー)で足し合わされることを示している．f1，f2 の同時検出は，量子力学的には $\hat{c}_1$，$\hat{c}_2$ による消滅演算により，「真空」$\langle 0|$* となることであるから，偏光も考慮し，式 (3.5) を用いると同時検出は次式で書ける．

$$\langle 0|\, \hat{c}_1^j \hat{c}_2^k = \frac{1}{2} \langle 0|\, (\hat{v}_1^j \hat{v}_1^k + \hat{a}^j \hat{v}_1^k - \hat{v}_1^j \hat{a}^k - \hat{a}^j \hat{a}^k) \tag{3.6}$$

ヴィクター，EPR 源からの入力に同時に 2 つ以上の光子が存在しないとすると，$\hat{v}_1^j \hat{v}_1^k$，$\hat{a}^j \hat{a}^k$ は無視できるから，式 (3.6) は次のようになる．

$$\langle 0|\, \hat{c}_1^j \hat{c}_2^k = \begin{cases} \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, {}_{\mathrm{VA}}\Big\langle \psi^{(-)} \Big| & j \neq k \\ 0 & j = k \end{cases} \tag{3.7}$$

$j = k$ の場合の 0 は自明であり，物理的にはありえないことであるから，f1，f2 の同時検出は ${}_{\mathrm{VA}}\big\langle \psi^{(-)} \big|$ と等価であるといえる．$j = k$ の場合の解釈は次のようなものである．

$j = k$ はヴィクターと EPR 源からの入力が同じ偏光の光子であることを意味するが，この場合干渉が起こるから，f1 と f2 にひとつずつ光子が到達することはありえない．つまり，「もともと何もない」としないとつじつまが合わない．逆に $j \neq k$ の場合，干渉は起こらず，ビームスプリッターではそれぞれの光子の同時透過または同時反射が起こり，その状態が $\big|\psi^{(-)}\big\rangle_{\mathrm{VA}}$ ということになる．

ここで注意しなければならないのは，式 (3.7) の導出で，ヴィクター，EPR

---

* これ以降，$|0\rangle$ は横偏光の光子ではなく，光子 0 個(「真空」)を表すことにする．ここまで 2 つの状態を $|0\rangle$，$|1\rangle$ で表していたのは，この解説を n 次元($|\,0\rangle, |\,1\rangle, \cdots, |\,n-1\rangle$)に拡張可能[18]とするためである．

源からの入力に同時に2つ以上の光子が存在しないと仮定したことである．後述するが，この仮定が，ザイリンガーらの実験の命取りとなっている．

以上より，条件付きではあるが，検出器p，f1，f2の3つの同時検出により，アリスはベル測定を行い，その結果が $\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}$ であったことがわかる．この瞬間，ボブの持つEPRペアの片方の光子Bは，$-(\alpha|\leftrightarrow\rangle_{\mathrm{B}}+\beta|\updownarrow\rangle_{\mathrm{B}})$ に変化し，アリスから3つの検出器で同時検出をしたという知らせ(古典的情報)を受ければ，ボブは自分のところに量子情報が到達したことを知り，テレポーテーションが完了する．

ここで，$\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}$ を用いる利点は，3つの同時検出が達成されると，ボブの手許の状態が，符号を除くと送りたかった状態になっていることである．ただし，この測定では他のベル基底の場合は区別できないため，起こる現象の3/4は捨てているともいえる．しかし，3つの検出器で同時検出した場合は，かなり高い確率でテレポーテーションが成功する．ザイリンガーのグループではこれらを実験的に示した．

B．致命的欠陥

しかし，この実験法には大きな欠陥があることが明らかにされた[17)]．つまり，前述の仮定「ヴィクターとEPR源からの入力に同時に2つ以上の光子は存在しない」が満たされていないのである．これは，現在のフォトンカウンティング法では，1つの光子の検出と，同じタイミングで同じ検出器に飛来した2つ以上の光子の検出が同じ1カウントであり，これらを区別できないことによる．

もし，これらが区別できないとすると，先ほど説明したベル測定(3つの検出器による同時検出)は意味をなさなくなる．つまり，ベル測定とはならないということになる．式(3.7)の導出において，$\hat{v}_1^j\hat{v}_1^k$ が無視できなくなるからである[*]．EPRペア V_1，V_2 が同時に二組生成され，$\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{AB}}$ が生成されなかった場合(pに2個，f1，f2にそれぞれ1個の光子)と，テレポーテーションの必要条件である $\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}$ の状態(p，f1，f2に1個ずつの光子)が，両方とも3つの検出器の同時検出をもたらすのである．

---

*話を簡単にするため $\hat{a}^j\hat{a}^k$ は無視する．これは，pでの検出によりヴィクターからの入力には少なくとも1つ以上の光子が存在するため，アリス・ボブEPR源からの入力に2つ以上の光子が存在しなくても，これ以降の議論の一般性は失われないからである．

EPR ペア V_1，V_2 が同時に二組生成される確率は EPR ペア A，B と EPR ペア V_1，V_2 がそれぞれ一組ずつ生成される確率に比べて無視できるほど小さいと考えるかもしれない．ところが，そうではないのである．p に 2 個，f1，f2 にそれぞれ 1 個の光子が検出される確率と，p，f1，f2 に 1 個ずつの光子が検出される確率は等しいことが以下のように(煩雑ではあるが)証明されている．

パラメトリック過程から生成される状態は，EPR ペアが 0 個，1 個，2 個の状態をそれぞれ $|0\rangle$，$\left|\psi^{(-)}\right\rangle$，$|\chi\rangle$ として

$$A_0\,|0\rangle_{lm} + A_1\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{lm} + A_2\,|\chi\rangle_{lm} + \cdots \tag{3.8}$$

と書ける(EPR ペアが 3 個以上は省略している)．ここで，$(l,m) = (V_1,V_2)$ または (A,B)，$A_0 = \sqrt{1-|\xi_{lm}|^2}$，$A_1 = \xi_{lm}$，$A_2 = \xi_{lm}^2/2$，$\xi_{lm}$ は (l,m) のカップリング定数 ($|\xi_{lm}| \ll 1$) である．したがって，式 (3.4) の $\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{AB}}$ を式 (3.8) の状態($(l,m) = (A,B)$)に置き換え，さらに式 (3.8) によるもうひとつのパラメトリック過程 V_1V_2 (式 (3.8) で $(l,m) = (V_1,V_2)$ の場合の $\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{V_1V_2}$ を $|\mathrm{EPR}\rangle_{V_1V_2}$ と書き直したもの)との積をとれば，3 つの検出器の同時検出によりボブの許に生成される状態の密度行列* ρ_{B} は，ξ の最低次のものだけで次式のようになる．

$$\rho_{\mathrm{B}} \propto |\xi_{V_1V_2}|^4\,|0\rangle_{\mathrm{BB}}\langle 0| + |\xi_{V_1V_2}\xi_{\mathrm{AB}}|^2\,|\Psi\rangle_{\mathrm{BB}}\langle\Psi| \tag{3.9}$$

ここで，$|\Psi\rangle_{\mathrm{B}}$ は送りたかった状態 ($\alpha\,|\leftrightarrow\rangle_{\mathrm{B}} + \beta\,|\updownarrow\rangle_{\mathrm{B}}$) である．

式 (3.9) を説明すると，3 つの検出器の同時検出によって，2 つの状態の混ざった状態(混合状態)がボブのところに現れる．ひとつは，EPR ペア V_1，V_2 が同時に二組生成され，$\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{AB}}$ が生成されなかったため，ボブのところには何も来ない「真空」$|0\rangle_{\mathrm{B}}$ であり(p に 2 個，f1，f2 にそれぞれ 1 個の光子が到達)，もうひとつは，テレポーテーションの条件を満たした場合の，送りたかった状態 $|\Psi\rangle_{\mathrm{B}}$ である(p，f1，f2 に 1 個ずつの光子が到達)．

ここで，ザイリンガーのグループの実験では，$|\xi_{V_1V_2}| = |\xi_{\mathrm{AB}}|$ であるので，式から明らかなように，「真空」$|0\rangle_{\mathrm{B}}$ が現れる確率と $|\Psi\rangle_{\mathrm{B}}$ が現れる確率が同じ

* 密度行列とは，波動関数だけでなく，波動関数の観測後の状態を記述できるもので，量子状態をより一般的に記述する方法である．詳しくは文献 16 を参照されたい．

になっている．つまり，pに2個，f1，f2にそれぞれ1個の光子が検出される(EPRペアV_1，V_2が同時に二組生成される)確率と，p，f1，f2に1個ずつの光子が検出される確率は等しくなっている．したがって，現れる状態の半分は「真空」$|0\rangle_B$となり，送りたかった情報の半分しか伝わっていないことになる．これは量子テレポーテーションなどやらずに，普通の「古典的」通信でも同じことができるといえる．

これを救うには，ボブが自分のところに「真空」以外のものが来ていることを状態を壊さずに確かめなければならないが，それは現在の技術では不可能である．もちろん，ボブが測定により，「真空」以外の状態が来ていることを知ることはできるが，ボブが測定を行ってしまうと，不確定性原理により状態が破壊されるから，テレポーテーションを行ったことにはならない．ザイリンガーの実験では，ボブの状態を測定することにより真空でないことを確認してしまったので，彼らの実験は量子テレポーテーションとはなっていない(ボブの出力が破壊されている)．

かなり込み入った説明をしたが，**要するに現時点では2次元量子テレポーテーション実験に成功したグループはない．**

4章 無限次元(連続量)量子テレポーテーション

4.1 無限次元(連続量)量子テレポーテーション理論

A. はじめに

ベネットらのスキームが提案された後，これを無限次元すなわち連続量に拡張したのはヴェイドマン(L. Vaidman)である[19]．歴史的に見ると，アインシュタインらは連続量である共役物理量の量子エンタングルメントについて述べており，ボーム，ベルらによって2次元にランクダウンされたことは前に述べた．これらを応用したベネットらが2次元量子テレポーテーションを提案し，最後にヴェイドマンが無限次元に拡張して連続量のテレポーテーションにしたのであるから，ある意味で原点回帰なのかもしれない．

ヴェイドマンの提案を，数学的にいうと特異的(singular)ではない(つまりデルタ関数ではない)形のエンタングルメントを用いて，実験可能な形に定式化したのはブラウンシュタイン(S. L. Braunstein)とキンブル(H. J. Kimble)である[20]．彼らは，2モードスクイーズド光(two-mode squeezed state)なるものを用いれば，上述したようなフォトンカウンティングを行う必要がなく，ホモダイン検出のような高い量子効率の測定法が使え，前述したような欠点はないとした．

理論的形式としては，無限次元のEPR状態 $|\mathrm{EPR_{inf}}\rangle_{\mathrm{AB}}$ (EPRペア，2モードスクイーズド光)は，式(3.3)の $\left|\phi^{(+)}\right\rangle_{\mathrm{AB}}$ の0，1を n (光子数)とし，$n \to \infty$ とすればよい[21]．すなわち

$$|\mathrm{EPR_{inf}}\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\cosh r}\sum_{n=0}^{\infty}(\tanh r)^n\,|n\rangle_{\mathrm{A}}\,|n\rangle_{\mathrm{B}} \tag{4.1}$$

となる．ここで，n は光子数を表し，r はスクイージングパラメータ*である．

送りたい状態 $|\psi\rangle_{\mathrm{V}}$ は，2 次元の場合と同じように $|n\rangle_{\mathrm{V}}$ の線形結合で書ける．

$$|\psi\rangle_{\mathrm{V}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |n\rangle_{\mathrm{V}} \tag{4.2}$$

アリス，ボブ，ヴィクター 3 人の状態が，式 (4.1) と式 (4.2) の積で書けるのも 2 次元の場合[式 (3.4)]と同様である．しかし，これを 2 次元の場合のようにヴィクターとアリスのベル基底で展開するのは，この解説の範囲を超えるので，興味のある方は文献 13, 18, 30 を参照されたい．

ここでは，もう少し直観的な (?) 方法で説明を試みる．n による説明は 2 次元を無限次元に拡張するという意味では素直な方法であるが，結局は光子数をカウントすることになり，実験ではフォトンカウンティングは行わないから，実験との対応は悪い．量子力学には相補性，つまり粒子性と波動性が存在するが，ここでは光子という粒子性から離れ，波動性＝電磁場としての説明を試みる．本格的な説明に入る前に，まずスクイーズド光について簡単に述べる．

B. コヒーレント状態とスクイーズド状態

光の量子状態には比較的容易に生成できるものとして，古典的電磁波に近いコヒーレント状態と，不確定性原理を「スクイーズ(squeeze)した(絞った)」スクイーズド状態がある．実質上レーザーから出力される光は，コヒーレント状態となっており，その概念図を図 4.1 に示す．

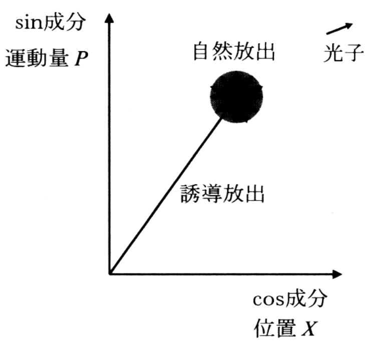


図 4.1　コヒーレント状態.

* スクイージングパラメータについては後で説明する．

量子状態の説明のところで光子像を用いるのは気が引けるが，仮にひとつの光子が図にあるように小さなベクトルで書けたとすると*，コヒーレント状態は2つの部分で構成される．ひとつは位相のそろった大きなベクトルである誘導放出(コヒーレントな部分)であり，もうひとつは光子の位相がランダムな自然放出の部分である．自然放出の部分は，位相がランダムなため，足し合わされたベクトルの終点は円の内部(円の中心付近)になり，その大きさはひとつの光子の振幅(正確にはその1/2)となっている**．

実は，この円の大きさが不確定性の源なのである．例えば，コヒーレント状態の振幅を測ろうとしても，この円の分だけ不確定さが生じるし，位相を測ろうとしても同様なことが起こる．直交位相成分つまりsin，cos成分が共役物理量(位置と運動量に相当)で同時に確定できないのもこのためである．

多少本論からはずれるが，普通の光もある意味でコヒーレント状態である．ただし，この場合誘導放出はないから，大きなベクトル(コヒーレントな部分)は存在せず，原点を中心とする円になる．このとき，ベクトルの終点はほとんど原点になるので，平均振幅は零，つまり何もないのと同じということになる．ある意味で揺らぎだけ存在しているような状態なので，真空場と呼ばれることもある．普通の光が真空場なんて不思議な呼び方だと思われるかもしれないが，「業界用語」なので辛抱してもらいたい．この自然放出の部分を真空場揺らぎ***と呼ぶのも，この「流れ」からきている．実際，この業界では本当に何もない「真空」$|0\rangle$ も真空場であり，同じ状態として取り扱う．

比較的容易に生成できるもうひとつの量子状態——スクイーズド状態は，この真空場揺らぎを再配分した状態である．その中でも生成するのが容易なのは，スクイーズされた真空場であり，概念的には図4.2に示したような状態である．多少言い過ぎの感はあるが，簡単にいうと生成される光子の位相がある方向に偏ったような状態である．このような状態では片方の位相成分(図ではcos成分)の揺らぎが減少し，その分もう片方の位相成分(図ではsin成分)の揺らぎが増加している．

---

* 余り正確な表現ではないが，説明が容易なためこのようにする．

** 正確に言うと，光子の存在そのものが不確定性原理に由来する (光子 $\Longleftrightarrow$ 不確定性)．混乱を承知でいえば，「粒子としての光子など実在しない」と言っている人すらいる[32]．

*** 真空場揺らぎは量子ノイズである．

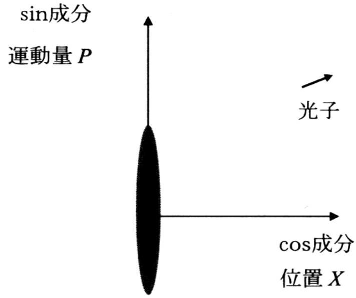


図 4.2　スクイーズド状態(スクイーズされた真空場).

不確定性原理の教えでは共役物理量の揺らぎの積の最低値は一定であるから，スクイーズド状態では，この揺らぎの積(つまり楕円の面積)を保ちつつ，片方の物理量の揺らぎを小さくし，もう片方の物理量の揺らぎが大きくなっている．つまり不確定性原理には矛盾しない．スクイーズの度合いを示す量としてスクイージングパラメータ r があり，位相が全くランダムな真空場レベルの揺らぎを 1 とすれば，スクイーズされた揺らぎの大きさは e^{-2r} と書ける．例えば，$r = 0.347$ のとき $e^{-2r} = 0.5$ で，揺らぎは真空場レベルの半分になっている．いわゆる 3 dB のスクイーズである．

C. 2モードスクイーズド状態

このようなスクイーズド状態がなぜ EPR 相関に関係あるのだろうか？ それはその生成過程に関係がある．

スクイーズされた真空場は，縮退パラメトリック過程により生成される．前に述べたように，縮退パラメトリック過程とは，非線形光学過程のひとつであり，第二高調波発生の逆の過程である．つまり，ポンプ光から周波数半分(エネルギー半分)の光を発生させる過程である．

これを光子像で見ると(また電磁場の説明で光子像を持ち出すのは恐縮であるが)，1つのポンプ光子がエネルギーの等しい2つの光子に分裂する過程であり，これによりある意味で光子の位相が偏った状態——スクイーズされた真空場が生成される．さらに，この過程は図 2.1 に示した EPR の主張に非常に似ており，分裂して生成された光子対は EPR ペアとなっている．しかし，もう少し細かいことをいうと，この過程はポンプ光の位相でしか起こっておらず，ポ

ンプ光に直交する位相では，EPR の主張通りにはなっていない．

そこで，2 つのポンプ光を用い，縮退パラメトリック過程により，独立した 2 つのスクイーズされた真空場を生成し，位相を直交させて混ぜれば，2 つの直交する位相で EPR の主張通りの状態を生成できると考えるのは自然の流れかもしれない．このような発想のもとで生まれたのが，2 モードスクイーズド光 (2 モードスクイーズされた真空場) である[24,25]．

アインシュタインらが主張した EPR 状態と等価な状態である 2 モードスクイーズド光について，式を用いて説明しよう．2 モードスクイーズド光は，上述したように直交した位相で，独立した 2 つのスクイーズド光を合波することにより生成される．

電磁場を表現する方法としては，量子力学的複素振幅として振る舞う消滅演算子 $\hat{a}_j$ で表現(ハイゼンベルグ表示)するのが一般的であり，ここでもその方法を用いる．複素振幅の cos 成分，sin 成分(つまり直交位相成分)は共役物理量であるから，位置と運動量と等価と考えることができる．したがって，これらをそれぞれ $\hat{x}_j$，$\hat{p}_j$ ($\hat{a}_j = \hat{x}_j + i\hat{p}_j$) と書く．

スクイーズド状態は，(0) が真空場を表すとして，$(\mathrm{e}^{\pm r}\hat{\hat{x}}_j^{(0)}, \mathrm{e}^{\mp r}\hat{\hat{p}}_j^{(0)})$ と書けるから，それらを 50% ビームスプリッターを用い直交する位相で合波すれば，式 (3.5) と同様な関係を用いて，2 モードスクイーズド光は以下のように書ける[22,23]．

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_\mathrm{A} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{r}\hat{\hat{x}}_\mathrm{A}^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-r}\hat{\hat{x}}_\mathrm{B}^{(0)} \\
\hat{p}_\mathrm{A} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-r}\hat{\hat{p}}_\mathrm{A}^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{r}\hat{\hat{p}}_\mathrm{B}^{(0)} \\
\hat{x}_\mathrm{B} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{r}\hat{\hat{x}}_\mathrm{A}^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-r}\hat{\hat{x}}_\mathrm{B}^{(0)} \\
\hat{p}_\mathrm{B} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-r}\hat{\hat{p}}_\mathrm{A}^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{r}\hat{\hat{p}}_\mathrm{B}^{(0)}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

ここで，r は先ほどと同様スクイージングパラメータであり，(0) は真空場を表している．添字の A，B はアリス，ボブに向かうモードであることは 2 次元の場合と同様である．

2 モードスクイーズド光において $r \to \infty$ とすると，完全な EPR 状態：($\hat{x}_\mathrm{A} -$

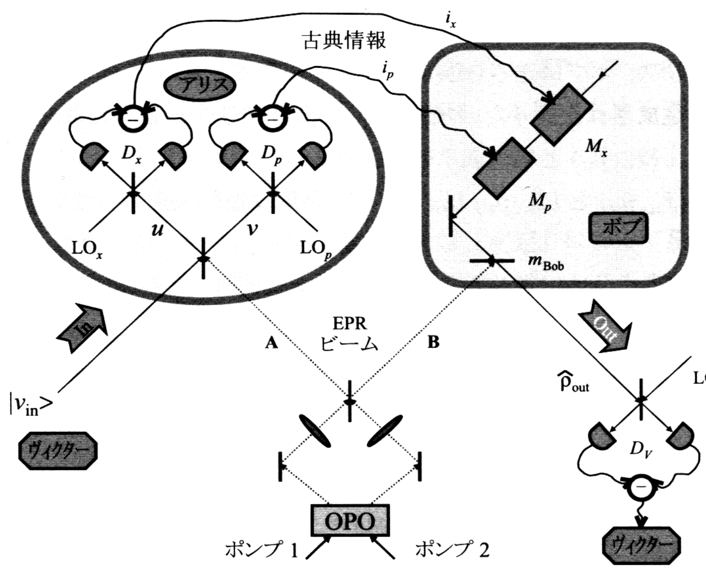


図 4.3　連続量量子テレポーテーション実験配置図.OPO：パラメトリック発振器，LO_j：ローカルオシレーター光，D_j：ホモダイン検出器，M_j：光変調器，m_{Bob}：99/1 ビームスプリッター.

$\hat{x}_B) \to 0$，$(\hat{p}_A + \hat{p}_B) \to 0$ となる．ただし，$r \to \infty$ でなくても $r > 0$ であれば EPR 相関(量子エンタングルメント)は常に存在している．このことは，2 モードスクイーズド光を光子数状態で表示した式 (4.1) から明らかである．

もう少し厳密に，2 次元のベルの不等式に相当する連続量の量子エンタングルメントの条件が，いくつかのグループから提案されている[26,27]．興味のある方は参照されたい．いずれにしても，連続量の EPR 状態においては，$r > 0$ であれば，光路に損失があっても検出器の量子効率が非常に低くても量子エンタングルメントは常に存在している*．これは 2 次元の系に比べて，実験上の大きな利点といえる．

図 4.3 に連続量量子テレポーテーション実験の配置図を示す．まず，縮退パラメトリック過程(図では OPO)により，独立した 2 つのスクイーズされた真空

* 連続量の EPR 状態は 2 次元の EPR ペアを大量に含んでいるといえる．したがって，損失があっても常に 2 次元の EPR ペアは残っている．この性質を用いれば，2 次元の量子情報 $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ は損失があっても完全に送ることができる[33]．

場を生成する．これらを直交した位相で合波し，EPR ビーム A，B を生成し，それぞれアリス，ボブに送る(式 (4.3) の状態が生成される)．アリスは，ヴィクターにより生成された送りたい状態 $(\hat{x}_{\rm in}, \hat{p}_{\rm in})$ と自分のところに来た EPR ビームを合波し，$(\hat{x}_u, \hat{p}_u)$ と $(\hat{x}_v, \hat{p}_v)$ を生成する．

ここで，$(\hat{x}_u, \hat{p}_u)$ と $(\hat{x}_v, \hat{p}_v)$ は，式 (3.5) と同様な関係を用いて以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
\hat{x}_u &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_{\rm in} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_{\rm A} \\
\hat{p}_u &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_{\rm in} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_{\rm A} \\
\hat{x}_v &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_{\rm in} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_{\rm A} \\
\hat{p}_v &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_{\rm in} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_{\rm A}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

アリスはホモダイン測定(正確にはバランス型ホモダイン測定)を行い，$\hat{x}_u$ と $\hat{p}_v$ を測定する．ホモダイン測定とはラジオなどで行われているヘテロダイン検波と同種の測定で，局発光(ローカルオシレーター光)と信号光を合波し，干渉により局発光の位相成分のみを取り出す方法である．この方法では，フォトン 1 個の大きさに由来する量子ノイズつまり真空場揺らぎ以下の信号レベルまで測定できる[16)]．

この方法のもうひとつの利点は，検出量子効率をほぼ 100% にできることである．検出効率がほぼ 100% になれば，2 次元のテレポーテーション実験で起こったような問題は起きない．

D．無限次元量子テレポーテーション

アリスが $\hat{x}_u$ と $\hat{p}_v$ を測定することはベル測定に対応している*．この証明は本解説の範囲を超えるので，興味のある方は文献 13,18,30 を参照されたい．要するに，この測定をアリスが行うと，その瞬間ボブの EPR ビームがヴィクターの状態 $(\hat{x}_{\rm in}, \hat{p}_{\rm in})$ に近い形に変化するのは 2 次元の場合と同様である．

ここで，完全な EPR ビームの場合$(r \to \infty)$，アリスはヴィクターの状態

---

*2 次元の場合と同様，アリス，ヴィクター間の量子エンタングルメントを生成しているともいえる[13,30,31)]．

$(\hat{x}_{\rm in}, \hat{p}_{\rm in})$ について何の情報も得ていないことがわかる．なぜなら，$\hat{x}_u$ と $\hat{p}_v$ において，$(\hat{x}_{\rm A}, \hat{p}_{\rm A})$ に由来する量子ノイズ（振幅 e^r）$\equiv$ EPR ノイズが発散して，$(\hat{x}_{\rm in}, \hat{p}_{\rm in})$ の情報を覆い隠してしまうからである．これが 2 次元量子テレポーテーションのところでも説明したように，ベル測定の「トリック」であり，不確定性原理(限界)回避の方法である．

繰り返しになるが，アリスが何も得なければ「測定」によって量子情報が壊れることはないし，EPR 相関により量子情報伝達に**近いところ**まで行うことができる(前に述べたように情報伝達とはなっていない)．

式 (4.4) を用いると，ボブの EPR ビームは次式のようになる[23]．

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\rm B} &= \hat{x}_{\rm in} - \sqrt{2}e^{-r}\hat{\hat{x}}_{\rm B}^{(0)} - \sqrt{2}\hat{x}_u \\ \hat{p}_{\rm B} &= \hat{p}_{\rm in} + \sqrt{2}e^{-r}\hat{\hat{p}}_{\rm A}^{(0)} - \sqrt{2}\hat{p}_v \end{aligned} \tag{4.5}$$

アリスの一般化されたベル測定の結果，量子変数 $\hat{x}_u$，$\hat{p}_v$ は，古典的変数 x_u，p_v に変化する*．細かい話になるが，ホモダイン検出器の量子効率が 1 ではなく η $(\eta < 1)$ のとき，式 (4.5) の $\hat{x}_u$ と $\hat{p}_v$ は，それぞれ $\eta\hat{x}_u + \sqrt{1-\eta^2}\hat{\hat{x}}_u^{(0)}$ と $\eta\hat{p}_v + \sqrt{1-\eta^2}\hat{\hat{p}}_v^{(0)}$ に置き換えられる．ここで，$\hat{\hat{x}}_u^{(0)}$ と $\hat{\hat{p}}_v^{(0)}$ はロスにより進入してくる「真空場」の振幅である．

次に，アリスは自分のベル測定結果 x_u，p_v をボブに送る．ボブはその(古典的)情報を用いて光の状態を「生成」する**．ただし，前述したように EPR ビームが完全な場合($r \to \infty$)，アリスから送られてくる情報は EPR ノイズのみであるから(正確にいうと EPR ノイズに覆い隠されているから)，ボブが「生成」する状態も EPR ノイズのみとなり，「真の情報」については何も得たことにならない．

余談になるが，これは量子暗号と同じである．アリスからの情報を盗聴者であるイヴが盗み聞きしても，EPR ノイズにより情報は完全に覆い隠されているから，何のことやらわからない．量子テレポーテーションは量子暗号としても機能するのである．

---

* EPR ノイズを除くと，$(-\sqrt{2}x_u, -\sqrt{2}p_v)$ だけ，入力状態 $(\hat{x}_{\rm in}, \hat{p}_{\rm in})$ が，位相空間でシフトしていることがわかる[13]．

** 実験的手法については後で述べる．

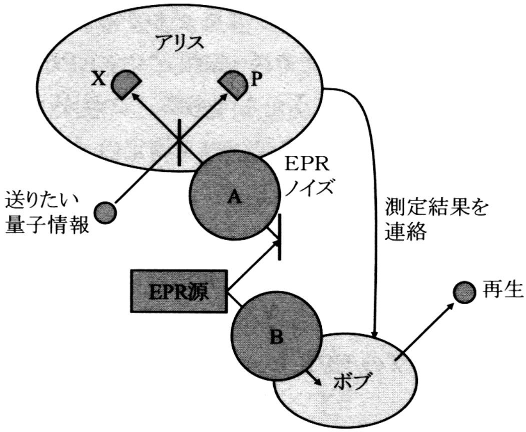


図 4.4　連続量量子テレポーテーションの概念.

量子テレポーテーションの仕上げとして，ボブはアリスからの(古典的)情報 x_u，p_v に基づき，量子情報 $(\hat{x}_{\rm in}, \hat{p}_{\rm in})$ を再生する．それはボブの「生成」したEPR ノイズの状態 x_u，p_v と，ボブの EPR 状態を干渉させ，EPR ノイズを引き去ることにより行う．つまり，式 (4.1) からわかるように，アリスとボブが共有する EPR ビームは，ある意味で EPR ノイズ(量子ノイズ)のコピーであり，同じものであるから，最終的にボブのところで引き去ることができるのである．このあたりの概念を図 4.4 に示した．

式で説明すると以下のようになる．ボブは，アリスからもらった情報をもとにして生成した EPR ノイズの状態 x_u，p_v と自分の EPR ビームを干渉させ，最終的な状態である $(\hat{x}_{\rm tel}, \hat{p}_{\rm tel})$ を生成する．式で表現すると

$$\begin{aligned}\hat{x}_{\rm tel} &= \hat{x}_{\rm B} + g\sqrt{2}x_u \\ \hat{p}_{\rm tel} &= \hat{p}_{\rm B} + g\sqrt{2}p_v \end{aligned} \tag{4.6}$$

となる*．ここで g は一般化された情報伝達のゲインであり，検出器の量子効率等のロスを考慮するとき必要になるものであるが，話を単純にするためロスなし

* この操作は，位相空間において $(g\sqrt{2}x_u, g\sqrt{2}p_v)$ だけシフトさせることに相当する．$g=1$，$r \to \infty$ のとき，量子テレポーテーションは，アリスのベル測定により $(-\sqrt{2}x_u, -\sqrt{2}p_v)$ だけシフトしたものを，ボブのところで $(\sqrt{2}x_u, \sqrt{2}p_v)$ だけシフトし直し，元に戻していることに相当する[13,30,31]．

$(\eta = 1)$ の場合に相当する $g = 1$ とする．このとき，再生された状態 $(\hat{x}_{\mathrm{tel}}, \hat{p}_{\mathrm{tel}})$ は

$$\hat{x}_{\mathrm{tel}} = \hat{x}_{\mathrm{in}} - \sqrt{2}\mathrm{e}^{-r}\hat{x}_{\mathrm{B}}^{(0)}$$
$$\hat{p}_{\mathrm{tel}} = \hat{p}_{\mathrm{in}} + \sqrt{2}\mathrm{e}^{-r}\hat{p}_{\mathrm{A}}^{(0)} \tag{4.7}$$

となる．ここで，EPR ビームが完全な場合，$r \to \infty$ であるから，$\hat{x}_{\mathrm{tel}} \to \hat{x}_{\mathrm{in}}$，$\hat{p}_{\mathrm{tel}} \to \hat{p}_{\mathrm{in}}$ となり，完全な量子テレポーテーションとなっている．

EPR ノイズ引き去りの部分を量子暗号として説明すると，EPR ビームを暗号の鍵と考えることができる．EPR 状態に限らず量子状態は複製できないし，観測すると壊れるので，かなり安全な鍵といえる．

ここでは説明が本解説の範囲を超えるので，ボブの $(\hat{x}_{\mathrm{in}}, \hat{p}_{\mathrm{in}})$ を再生する過程が，2 次元の量子テレポーテーション同様ユニタリー変換*であることの証明は省略した．興味のある方は文献 13,18,30 を参照されたい．いずれにしても，すべての過程において 2 次元の量子テレポーテーションを一般化したものが，連続量の量子テレポーテーションであることがわかる．したがって，連続量の量子テレポーテーションでは，(ランクダウンした) 2 次元の量子テレポーテーションで可能なことはすべて可能であり，さらに 2 次元の量子テレポーテーションでは不可能な状態のテレポーテーションが可能となる．

E.　「シュレーディンガーの猫」状態と量子コヒーレンス

ここでは，連続量の量子テレポーテーションのエッセンスが現れる「シュレーディンガー(E. Schrödinger)の猫」状態のテレポーテーションについて考える．

図 4.5 に「シュレーディンガーの猫」状態のテレポーテーションのシミュレーション結果を示す．図はウイグナー(Wigner)関数という準確率分布関数を縦軸としており，横軸は x と p (位置と運動量)である．「準」確率分布関数としたのは，(x, p) に存在する確率がマイナスになる場合があるからである．マイナスの確率など古典的にはあるはずがないが，量子の世界では存在する．

もちろん，「実在」するとは思えないが，数学的にはこうしないとつじつまが合わないのである(波動性に由来する)．したがって，ウイグナー関数がマイナ

* ここでは位相空間において $(g\sqrt{2}x_u, g\sqrt{2}p_v)$ だけ変位させる変位演算子 (displacement operator) となる．変位演算子については文献 16,21 を参照されたい．

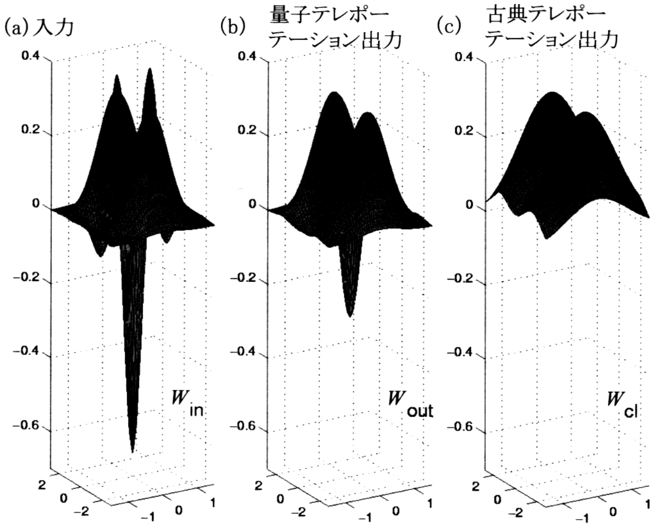


図 4.5　「シュレーディンガーの猫」状態のテレポーテーション．(a) 入力した「猫」状態，(b) 実際の実験で可能なレベル ($r = 1.15$) の量子テレポーテーション結果のシミュレーション，(c)EPR 相関を用いない古典的通信．

スになる部分は，「純量子的」と呼ばれる．ここでは，「ウイグナー関数が負」$\subset$「純量子的」ということだけ知っていればよいので，ウイグナー関数の詳細については文献 16 を参照されたい．

「シュレーディンガーの猫」状態は，ご存じのように箱の中の猫が「死んでいる状態」と「生きている状態」の重ね合わせ状態である．したがって，「生きている」という「確率」と「死んでいる」という「確率」のふた山がウイグナー関数に存在するはずであり，実際，図 4.5(a) には一番奥 $(0, 1.5)$ と一番手前 $(0, -1.5)$ にふた山あることがわかる．さらにそれ以外にもいくつかの凹凸がある．実は，この凹凸こそ量子的な状態(量子コヒーレンス*を残した状態：観測前の状態)の証なのである．つまり，「生きている猫」と「死んでいる猫」の量子力学的干渉効果なのである．特に原点付近のマイナス部分は前述したように純粋に量子力学的部分である．

この状態を $r \to \infty$ ではない実験可能なレベル ($r = 1.15$) で量子テレポーテー

* 「業界」用語で言うと，密度行列の非対角要素である．

ションを行った例が，図 4.5(b) に示されている．凸凹はかなり小さくなっているが，まだ存在が認められ，特にマイナスの部分はある程度残っている．つまり，まだ量子的性質が十分残っていることがわかる．それに対し，EPR 相関を用いない通常の古典的通信(ここでは古典テレポーテーションと呼んでいる)では，図 (c) に示すように，完全にマイナスの部分は消え失せており，量子的な部分は跡形もなくなっている．

このように量子テレポーテーションでは，(当然だが)波動関数のコヒーレンスを保つのに対し，古典的通信では波動関数のコヒーレンスは消失し，ただの確率分布になってしまう．観測問題の言葉でいうと，図 4.5(a) の状態を観測すると「波動関数の波束が収縮し」，図 (c) の状態になってしまうのである．もし $r \to \infty$ で，EPR 相関が完全であれば，前述したようにアリスは情報を何も得ていないので，観測していないのと同じである．したがって，波束の収縮は起こらない．つまりベル測定のトリックである．もちろん，このシミュレーションで示したように，実験的には「完全な」EPR 状態はつくり出せないので，ある程度の「収縮」は起こる．しかし，古典的通信のように完全に「収縮」してしまうことはない．

ここまで説明してくると，なぜ波束は「収縮」するのかという疑問をもたれる方は多いと思う．これに関しては波動関数の実在にかかわることなので，文献 2 あたりを読まれることを勧める．

実際の実験では，上の例で示したように EPR 相関は完全ではないし($r \to \infty$ ではない)，検出器等のロスも存在する ($\eta < 1$)．このような条件では，ヴィクターが用意した状態と全く同じ状態が，ボブのところで再生されるわけではなく，多少なりとも異なった状態が生成される．

厳密な意味では，これでは量子テレポーテーションの成功とは言えないが，さりとて通常の古典的通信では量子コヒーレンスを送ることはできないので，多少なりとも量子コヒーレンスを送れれば，ある意味で実験は成功したと言える．そこで，連続量の量子テレポーテーションの「成功」の定義が必要となる．次項においてその尺度となるフィデリティについて説明する．

F．フィデリティ

通常，量子情報通信の忠実度(フィデリティ，Fidelity:F)は以下のように定義

される[28]．

$$F \equiv \langle\psi_{\text{in}}|\,\hat{\rho}_{\text{out}}\,|\psi_{\text{in}}\rangle \tag{4.8}$$

ここで，$|\psi_{\text{in}}\rangle$ は送りたい量子情報(波動関数)，$\hat{\rho}_{\text{out}}$ はテレポートされ，情報の受け手に現れた状態の密度行列である．情報の受け手に，送られた量子状態がそのまま再現されれば，$\hat{\rho}_{\text{out}} = |\psi_{\text{in}}\rangle\langle\psi_{\text{in}}|$ であるから，$F = 1$ となる．

前述したように，$F = 1$ が真の意味での量子テレポーテーションの成功となるが，実験では $F = 1$ とはならないため，F の値で成否を定義しなければならない．最も合理的な基準は，古典的通信限界(古典的テレポーテーションの限界)である $F = 0.5$ を超えたかどうかで判断することであろう[28,29]．古典的限界を超えれば，量子コヒーレンスを送ったことになる．

古典的限界が $F = 0.5$ にあることの証明は，文献 28, 29 を参照していただくとして，ここではその直観的な意味を述べよう．古典的テレポーテーションにおいて，アリスは測定により量子状態の完全な情報(共役物理量の値)を得なければならない．しかし，何度も述べたように不確定性原理の壁に阻まれて，そのようなことはできない．せいぜいアリスにできることは，共役物理量のうちひとつを測定により確定し，もうひとつの物理量は諦めることである．したがっ

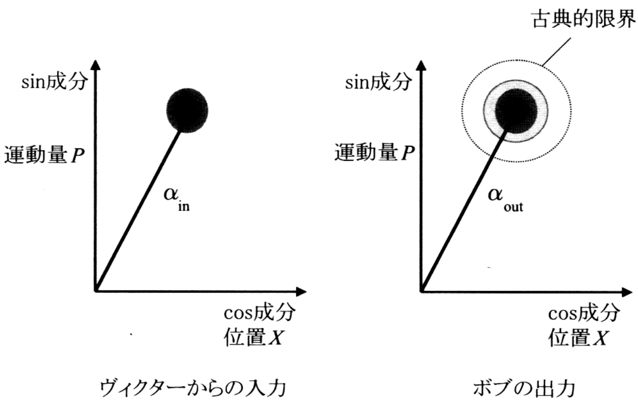


図 4.6　コヒーレント状態の量子テレポーテーション．ボブの出力において最も内側の円(量子ノイズ)の場合が $F = 1$ に相当し，完全な量子テレポーテーションとなっている．外側の大きな円は古典的通信限界 $F = 0.5$ を示しており，これより小さな円(量子ノイズ)の場合は量子テレポーテーションの「成功」である．

て，アリスが得た情報は送りたい量子情報の半分であり，その情報を受けたボブが再生できる状態は，送りたかった状態の半分の情報しか含まない．これが古典的限界 $F = 0.5$ の直観的説明である．

筆者らの実験[1)]では，ヴィクターの状態としてコヒーレント状態を用いた．図 4.6 にコヒーレント状態のテレポーテーション概念図を示した．図中の古典的限界は $F = 0.5$ を示している．

4.2　無限次元(連続量)量子テレポーテーション実験

A．サイドバンド

ブラウンシュタインとキンブルの提案を基に，筆者らは連続量の量子テレポーテーション実験を行った[1)]．実験装置の配置は図 4.3 に示した通りである．実験の詳細に移る前にこの種の実験の一般的な事柄について述べる．通常このような実験は，光そのものの周波数を用いるのではなく，電気光学変調器(EOM)等により生成したサイドバンド(図 4.7)を用いる．

これは，光の周波数は波長 1 ミクロンで 300THz と非常に速く，そのまま扱えるエレクトロニクスが存在しないからである．したがって，光は単なるキャリヤーとして扱い，量子状態等はサイドバンドの周波数で議論する．また，現実に存在する光やサイドバンドは完全にはシングルモード(単一周波数)ではなく，有限のバンド幅をもつから，実験では扱う物理量が少し違ってくるかもしれない．ただし，今まで行ってきたシングルモードとしての取り扱いは，そのままマルチモードでも使えることが，文献 23 に示されているので余り心配する

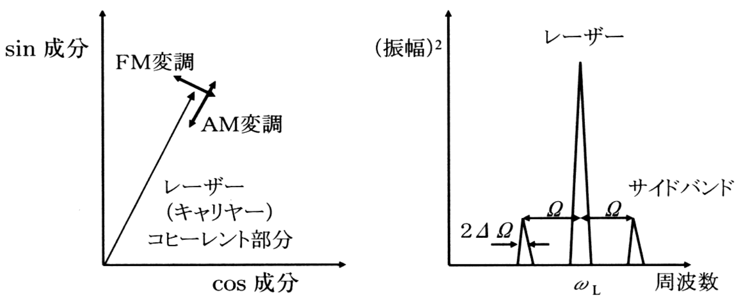


図 4.7　サイドバンド概念図．レーザー(キャリヤー)の量子ノイズの部分は省略している．

必要はない．

このあたりをもう少し詳しく述べてみよう．一般化された周波数 Ω（正確にはキャリヤー周波数からのオフセット）における振幅 $\hat{z}(\Omega,\delta)$ は

$$\hat{z}(\Omega,\delta) \equiv \frac{1}{2}\int_{\Omega-\Delta\Omega}^{\Omega+\Delta\Omega} \mathrm{d}\Omega'[\hat{a}(\Omega')\exp(-i\delta) + \hat{a}^{\dagger}(-\Omega')\exp(+i\delta)] \qquad (4.9)$$

と書ける．ここで，$\hat{a}$ ($\hat{a}^{\dagger}$) は消滅(生成)演算子である．これらが量子力学的複素振幅として振る舞うのは前に述べた．また，δ は位相因子で，$(\hat{x}(\Omega),\hat{p}(\Omega)) = (\hat{z}(\Omega,0),\hat{z}(\Omega,\pi/2))$ となっている．

このような場合，検出器の光電流出力をスペクトラムアナライザー(分解能幅 $\Delta\Omega$)で計測した場合のスペクトル密度 $\Psi(\Omega)$ は，周波数 Ω における振幅 $\hat{z}(\Omega,\delta)$ のパワーにほぼ等しくなる．つまり

$$\Psi(\Omega)\Delta\Omega \sim \langle \hat{z}^2(\Omega,\delta)\rangle \qquad (4.10)$$

という関係になっている．したがって，実験ではスペクトル密度 $\Psi(\Omega)$ を用いればよいことになる．通常の実験では，レーザーの周波数 ω_{L} から $\pm\Omega$ だけ離れたバンド幅 $\Delta\Omega$ の AM，FM サイドバンドを使うことになる．

B．実験の詳細

これ以降筆者らの行った量子テレポーテーション実験の詳細について述べる．図 4.3 に示したように，コヒーレントであるが独立した 2 つのポンプ光(430 nm)により光パラメトリック発振器(OPO)を駆動し，独立した 2 つのスクイーズド光(スクイーズされた真空場，波長 860 nm)を生成する．

OPO では非線形光学結晶として $KNbO_3$ を用いている．2 つのスクイーズド光は位相を直交させてハーフビームスプリッターで合波する．ビームスプリッターの出力は，前に説明したように，EPR 状態(2 モードスクイーズド光，式(4.3))となっている．これらをそれぞれアリス，ボブに送る．ヴィクターは光変調器により 2.9MHz にサイドバンド(図 4.6 のコヒーレントな部分 α_{in})を生成する．これは全体としてコヒーレント状態になっている．アリスは，このヴィクターからの「送りたい」状態と自分のところに来ている EPR ビームをハーフビームスプリッターで合波し，出力を 2 つのホモダイン検出器で測定する．ここで，ホモダイン測定用のローカルオシレーター光 (860 nm) の位相は直交して

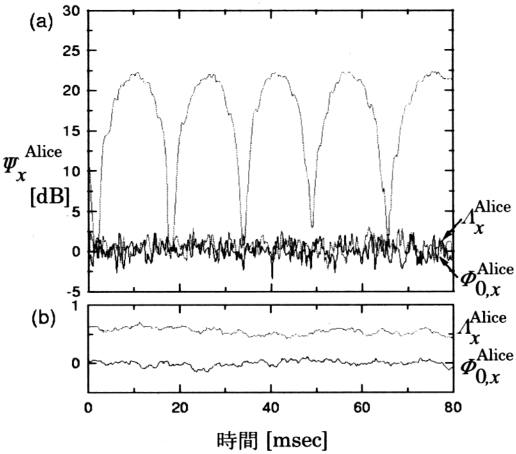


図 4.8 アリスのホモダイン検出器(D_x)出力のスペクラムアナライザー測定結果．周波数 ($\Omega/2\pi$) 2.9MHz，分解能幅 ($\Delta\Omega/2\pi$) 30kHz．(b) は，(a) の中でヴィクターの変調がない場合(つまりヴィクターからの入力が真空場の場合)の 10 回平均したトレースである[1]．

いる．つまり，それぞれ cos 成分(D_x)，sin 成分(D_p)を測定している．

図 4.8 に，アリスのホモダイン検出器(D_x)出力のスペクラムアナライザーによる測定結果を示す．縦軸はスペクトル密度 $\Psi(\Omega)$，横軸はヴィクターからの入力光の位相を表している．図中の周期的に振動している部分は，ヴィクターからの入力に 2.9MHz の変調サイドバンドがある場合であり，ピークの高さ(この図では約 22 dB)は，図 4.6 の $\alpha_{\rm in}$ の 2 乗(正確には $|\alpha_{\rm in}|^2/2$)に相当している．$\Lambda_x^{\rm Alice}$ と $\Phi_{0,x}^{\rm Alice}$ はヴィクターに変調を加えなかった場合であり，それぞれアリスに EPR ビームが入力した場合としなかった場合の(量子)ノイズレベルを示している．

ヴィクターに変調を加えなかった場合，入力は「真空場」(図 4.6 で $\alpha_{\rm in}=0$) となる．$\Phi_{0,x}^{\rm Alice}$ の大きさは，図 4.6 の真空場の大きさ（正確には振幅の 2 乗であるパワー）に相当している．$\Lambda_x^{\rm Alice}$ の大きさは，入力してくる EPR ビームのスクイージングパラメータに依存し，$r\to\infty$ なら無限大に大きくなるが，この実験では $r\sim 0.347$ であり，$\Lambda_x^{\rm Alice}$ が $\Phi_{0,x}^{\rm Alice}$ より若干大きい程度にとどまっている．もちろん，$r\to\infty$ なら $\Lambda_x^{\rm Alice}\to\infty$ となり，前述したように，アリス

はヴィクターからの入力について全く情報を得ることができず，「完全な」ベル測定ができたことになる(何もわからなくて，「完全な」測定なんて変な気はするが).

図 4.8(b) は，(a) の中の「真空場」入力部分の拡大図(10 回の平均値)である．図の周期的に振動している部分の最小値は，$\Lambda_x^{\mathrm{Alice}}$ または $\Phi_{0,x}^{\mathrm{Alice}}$ になっており，周期的に振動している部分全体で図 4.6 のコヒーレントな部分(α_{in}，正確には $\alpha_{\mathrm{in}}/\sqrt{2}$)と量子ノイズの部分を表している．

アリスは 2 つのホモダイン検出器(D_x，D_p)の出力(ベル測定結果)をボブに送る．ボブはそれを基に 2 つの変調器(M_x，M_p)を駆動し，2.9MHz のサイドバンドを生成する．このとき，それぞれの変調器の位相は直交しており，例えば M_x が強度変調器なら，M_p は位相変調器になっている．さらにボブは 99/1 ビームスプリッターにより，自分が変調した光と自分のところに来ている EPR ビームを適当な位相で干渉させる*．

アリスで混入した EPR ノイズと，ボブの EPR ビームのノイズは量子力学的コピーの関係にあるから，干渉させる位相が適当で，お互い引き算になるような干渉をすれば，EPR ノイズのみを消去することができる．これでテレポーテーションの完了である．

図 4.9 にヴィクターによりホモダイン測定された，ボブの出力した状態を示す．図 4.8 同様，スペクトラムアナライザーで 2.9MHz のサイドバンドを測定している．図 4.9 の周期的に振動している部分は，図 4.8 同様，ヴィクターの入力にコヒーレントな変調成分があった場合であり，他は変調成分がなかった，つまり入力が「真空場」であった場合である．

周期的に振動している部分のピークの高さは，再生された状態のコヒーレントな部分(図 4.6 の α_{out}，正確には $|\alpha_{\mathrm{out}}|^2$)である．この図では約 25 dB となっており，アリスの 1 つのホモダイン検出器の出力 22 dB の 2 倍(+3 dB)となっている．これはアリスが入力信号を 2 つに分け，それぞれをホモダイン測定しているからであり，この結果は，ボブにおいてコヒーレント状態のうちコヒーレントな部分は再生されていること($\alpha_{\mathrm{in}} = \alpha_{\mathrm{out}}$)を示している．残るは量子ノ

* これが，式 (4.6) で示した位相空間における $(g\sqrt{2}x_u, g\sqrt{2}p_v)$ のシフトの実現法である．

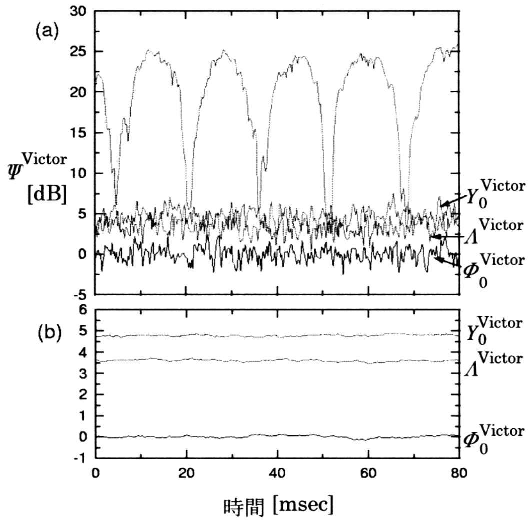


図 4.9　ヴィクターにより検証されたボブの出力した状態．(b) は，図 4.8 同様ヴィクターからの入力が真空場の場合の 10 回平均したトレースである[1)]．

イズ*の部分である．

そこで重要になるのは，$\Lambda^{\mathrm{Victor}}$ と $\Upsilon_0^{\mathrm{Victor}}$ のレベルである．これらは，それぞれ EPR ビームを用いた場合(量子テレポーテーション)と EPR ビームを用いなかった場合(古典テレポーテーション)の量子ノイズレベルを示している．アリスの出力のところでは $\Lambda_x^{\mathrm{Alice}} > \Phi_{0,x}^{\mathrm{Alice}}$ となっており，EPR ノイズの混入を示しているが，ボブの出力では $\Lambda^{\mathrm{Victor}} < \Upsilon_0^{\mathrm{Victor}}$ となっており，EPR ノイズが消去されていることがわかる．もちろん，$r \to \infty$ である完全な EPR 状態のときは，EPR 相関は完全であるから，$\Lambda^{\mathrm{Victor}}$ は，ヴィクターにおける真空場レベル Φ_0^{Victor} にまで下がる．

$r \to \infty$ でない場合のテレポーテーションの成功は，前述したように古典的限界を超えたかどうかで判断する．筆者らの実験では，別の方法により EPR ノイズを用いない場合の $\Upsilon_0^{\mathrm{Victor}}$ が古典的限界であることが確かめられている[1)]．したがって，$\Lambda^{\mathrm{Victor}} < \Upsilon_0^{\mathrm{Victor}}$ は，量子テレポーテーションの成功を示してい

---

* 厳密に言うと古典的ノイズも含まれている[34)]．しかし話が複雑になるため，これ以降量子ノイズと呼ぶことにする．

るといえる．

C. フィデリティ

量子テレポーテーションの成功をもう少し定量的に示すためには，フィデリティ F を用いなければならない．つまり，$F_{\mathrm{exp}} > 0.5$ を示さなければならない．導出は文献 22, 23 に譲るとして，コヒーレント状態の量子テレポーテーションのフィデリティ F は次のように書ける．

$$F = \frac{1}{2\sqrt{\sigma_Q^x \sigma_Q^p}} \exp\left[-(1-g)^2 \left(\frac{x_{\mathrm{in}}^2}{2\sigma_Q^x} + \frac{p_{\mathrm{in}}^2}{2\sigma_Q^p}\right)\right] \tag{4.11}$$

ここで，g は一般化されたゲイン，σ_Q^x と σ_Q^p は，テレポートされた状態の Q 関数の分散である．

Q 関数については，文献 16 を参照してもらいたいが，ウイグナー関数のような準確率分布関数の一種である．実験で得られる物理量はスペクトル密度 $\Psi(\Omega)$ であるが，その中で $\Lambda^{\mathrm{Victor}}$ や $\Upsilon_0^{\mathrm{Victor}}$ などの量子ノイズレベルは，ウイグナー関数の分散 (σ_W^j, $j = x, p$) に対応しており，σ_Q^x と σ_Q^p は，$\Lambda^{\mathrm{Victor}}$ や $\Upsilon_0^{\mathrm{Victor}}$ の測定値から，$\sigma_Q^j = \sigma_W^j + 1$ の関係を用いて求めることができる．

図 4.10 に，筆者らの実験における，ヴィクターにより測定されたボブの出力

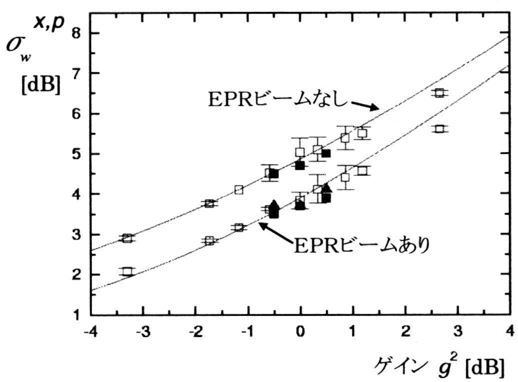


図 4.10　ヴィクターにより測定されたボブの出力の分散 σ_W^j のゲイン g 依存性[1)]．EPR ビームを用いた場合は $\Lambda^{\mathrm{Victor}}$ であり，用いなかった場合は $\Upsilon_0^{\mathrm{Victor}}$ である．横軸のゲイン g は図 4.6 の α_{in} と α_{out} の比であり，$\alpha_{\mathrm{in}} = \alpha_{\mathrm{out}}$ のとき $g = 1$ である．点線は理論曲線[1)]を示す．

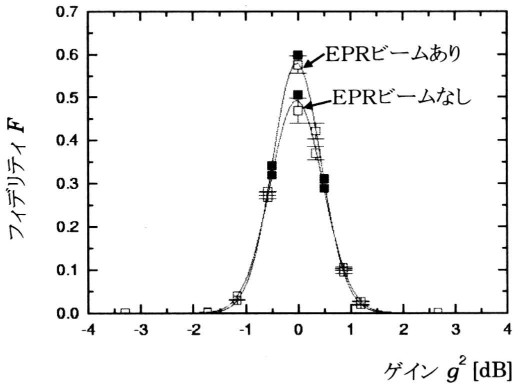


図 4.11　ヴィクターの測定結果から計算されるテレポーテーションフィディリティ $F_{\rm exp}$ のゲイン依存性[1)].

の分散 σ_W^j のゲイン g 依存性を示す．EPR ビームを用いた場合は $\Lambda^{\rm Victor}$ であり，用いなかった場合は $\Upsilon_0^{\rm Victor}$ である．横軸のゲイン g は図 4.6 の $\alpha_{\rm in}$ と $\alpha_{\rm out}$ の比であり，$\alpha_{\rm in} = \alpha_{\rm out}$ のとき $g = 1$ である．この図と式 (4.11) を用いて，実験のフィデリティ $F_{\rm exp}$ を計算しプロットしたものが図 4.11 である．

当たり前のようだが，$\alpha_{\rm in} = \alpha_{\rm out}$ となる $g = 1$ のとき，フィデリティは最大になっている．さらに，EPR ビームを用いたときは，$g = 1$ で $F_{\rm exp} = 0.58 \pm 0.02 > 0.5$ となっており，量子テレポーテーションが成功していることを示している．

5章 まとめおよび個人的展望

長々と述べてきたが，要するに量子テレポーテーションとは，アリスで入力した波動関数 $|\psi\rangle$ が，ボブのところで再生されることである．それだけのことであるが，その中には量子情報科学のエッセンスが詰まっている．

今後，明らかにフィデリティを1に近づける努力が必要となるであろう．また，量子テレポーテーションを中心とした量子情報科学が，一層重要な研究テーマとなることに疑う余地はない．なぜなら，量子テレポーテーションは，現在提案されている量子プロトコルの中で，唯一実験的に証明されたものだからである．アインシュタインから始まる数々の「思考実験」の中で，唯一現実の世界で行われた実験の価値は非常に大きい．

量子テレポーテーションの応用としては，ユニバーサルな量子コンピュータの作製，量子コンピュータ間のネットワーク(量子インターネット)，量子暗号など枚挙に暇がない．繰り返しになるが，量子テレポーテーションの研究は量子情報科学の研究そのものといっても過言ではない．

量子情報科学さらには量子テクノロジーは，従来の(日本ローカルな)理学，工学の枠を越えた新しいサイエンス&テクノロジー*と考えられる．かつての半導体テクノロジーが新たな学問分野・産業を築いて行ったように，量子エンタングルメントといういわば「純学問(理学)」が，量子コンピュータという「工学」と融合し，新しい領域を形成しつつある．

近年，物理離れが叫ばれて久しいが，この量子テクノロジーを通じて，過去に捕らわれない新しい領域に興味をもち，果敢にチャレンジする人が出れば非常にうれしく思う．特に日本においては，この分野の実験的研究が非常に少な

* ここで「工学」を敢えて「テクノロジー」としたのは，「テクノロジー」は「サイエンス」を含むからである．これは MIT や Caltech の名前(Institute of Technology)から考えても明らかであろう．

く，将来を考えると実験屋の増加が望まれる．さらに宣伝させてもらえば，筆者の所属する物理工学科は，まさに量子(現代物理)テクノロジー(工学)の学科である．このような学科が日本に存在していることも記憶にとどめて頂けると幸いである．「物理工学」は古くて新しいキーワードである．

謝　辞

量子テレポーテーション実験は主にカリフォルニア工科大学キンブル教授のもとで行われた．共同研究者各位に感謝する．また，井手俊毅，青木隆朗両氏には原稿を読んでもらいコメントを頂いた．

参考文献

1) A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble & E. J. Polzik : *Science*, **282**, 706 (1998)
2) C. A. Fuchs & A. Peres : *Physics Today*, March, 70 (2000)
3) A. S. Parkins & H. J. Kimble : LANL e-print quant-ph/9904062, quant-ph/9909021
4) G. Brassard, S. L. Braunstein & R. Cleve : *Physica D*, **120**, 43 (1998)
5) D. Gottesman & I. L. Chuang : *Nature*, **402**, 390 (1999)
6) J. Birnbaum & R. S. Williams : *Physics Today, Jan.*, 38 (2000)
7) A. N. Boto, P. Kok, D. Abrams, S. L. Braunstein, C. P. Williams & J. P. Dowling : *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 2733 (2000)
8) A. Einstein, B. Podolsky & N. Rosen : *Phys. Rev.*, **47**, 777 (1935)
9) N. Bohr : *Phys. Rev.*, **48**, 696 (1935)
10) J. S. Bell : *Physics*, **1**, 195 (1964)
11) A. Aspect, P. Grangier & G. Roger : *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 460 (1981)
12) C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres & W. K. Wootters : *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1895 (1993)
13) H. F. Hofmann, T. Ide, T. Kobayashi & A. Furusawa : *Phys. Rev. A*, **62**, 062304 (2000)
14) D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter & A. Zeilinger : *Nature*, **390**, 575 (1997)
15) S. L. Braunstein & A. Mann : *Phys. Rev. A*, **51**, R1727 (1995)
16) U. Leonhardt : Measuring the Quantum State of Light (Cambridge University Press, 1997)
17) S. L. Braunstein & H. J. Kimble : *Nature*, **394**, 840 (1998)
18) S. J. van Enk : *Phys. Rev. A*, **60**, 5095 (1999)
19) L. Vaidman : *Phys. Rev. A*, **49**, 1473 (1994)
20) S. L. Braunstein & H. J. Kimble : *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 869 (1998)
21) D. F. Walls & G. J. Milburn : Quantum Optics (Springer-Verlag, 1994)
22) 古沢　明 : *bit*, **31** (10), 2 (1999)
23) P. van Loock, S. L. Braunstein & H. J. Kimble : *Phys. Rev. A*, **62**, 022309 (2000)

24) M. D. Reid & P. D. Drummond : *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 2371 (1988); M. D. Reid : *Phys. Rev. A*, **40**, 913 (1989)
25) Z. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble & K. C. Peng : *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 3663 (1992)
26) L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac & P. Zoller : *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2722 (2000)
27) R. Simon : *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2726 (2000)
28) S. L. Braunstein, C. A. Fuchs & H. J. Kimble : *J. Mod. Opt.*, **47**, 267 (2000)
29) S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble & P. van Loock : LANL e-print quant-ph/00120001
30) 井手俊毅，小林孝嘉，古沢　明：数理科学 6 月号，24 (2001)
31) H. F. Hofmann, T. Ide, T. Kobayashi & A. Furusawa : *Phys. Rev. A*, 投稿中
32) W. E. Lamb, Jr. : *Appl. Phys. B*, **60**, 77 (1995)
33) T. Ide, H. F. Hofmann, T. Kobayashi & A. Furusawa : *Phys Rev. A*, 投稿中
34) T. Ide, H. F. Hofmann, T. Kobayashi & A. Furusawa : 投稿準備中